Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

11^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1.

Seja V um espaço euclideano real e seja $T : V \to V$ uma transformação linear sobrejectiva tal que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$.(Estas transformações chamam-se unitárias.)

Mostre que:

a) T é injectiva;
b) $\langle T^{-1}(u), T^{-1}(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
c) $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^{-1}(v)\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
d) $\|T(v)\| = \|v\|$, para todos os vectores $v \in V$.

Problema 2.

Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar numa base ortonormal a base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$.

a) $\mathbf{u_1} = (1, -3)\,, \mathbf{u_2} = (2, 2)$
b) $\mathbf{u_1} = (1, 0)\,, \mathbf{u_2} = (3, -5)$

Problema 3.

Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ numa base ortonormal.

a) $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)\,, \mathbf{u_2} = (-1, 1, 0)\,, \mathbf{u_3} = (1, 2, 1)$
b) $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0)\,, \mathbf{u_2} = (3, 7, -2)\,, \mathbf{u_3} = (0, 4, 1)$

Problema 4.

Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar numa base ortonormal a base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Problema 5.
Seja V o espaço linear real das matrizes 2×2.

a) Mostre que a função $\langle A, B\rangle = tr(A^t B)$ define um produto interno em V, onde A^t representa a transposta da matriz A e $tr(A)$ (o traço de A) é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A.
b) Determine o complemento ortogonal em V do subespaço das matrizes diagonais.
c) Determine uma base para o subespaço de V formado pelas matrizes de traço nulo. Indique o complemento ortogonal deste subespaço.

Problema 6.
Considere a seguinte função em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $\langle ., .\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
b) Ortogonalize os vectores $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$.
c) Determine a projecção ortogonal de $(1, 1, 1)$ sobre o subespaço $\mathrm{L}(\{v_1, v_2\})$.

Problema 7.
Seja V o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere em V o produto interno dado por $\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$.

a) Determine uma base ortonormal para o subespaço L de V gerado por $3x^2 + 4x$ e por $7x^2 + x + 12$.
b) Determine a projecção ortogonal de $p(x) = x^2$ sobre L.

Problema 8.
Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u_1} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{u_2} = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$.
Exprima $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, em que $\mathbf{w_1} \in W$ e $\mathbf{w_2} \in W^\perp$.

Problema 9.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Encontre bases para os subespaços gerados pelas linhas da matriz, pelas colunas da matriz e para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz A.

b) Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas linhas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A. (Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.)
c) Encontre uma base para o subespaço nulo da matriz A^T. Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas colunas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da ma triz A^T. (Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.)

Problema 10.
Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$ e a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$ respectivamente, quando

a) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual;
b) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o seguinte produto interno: $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$.

Problema 11.
Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?
b) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -5t$ e $z = 4t$, sendo $t \in \mathbb{R}$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

Problema 12.
Determine a distância de $(2, 0, 1)$ ao plano $x - y - z = 3$, considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.