

Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

1ª Lista de Exercícios

Problema 1. Calcule $2A - 3B$, onde

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 - 2i & 0 \\ -1 & 1 + i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 + 2i \\ i & 3 - i \end{bmatrix}$$

Problema 2. Calcule, se possível, os produtos AB e BA , quando:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = [1 + i \quad -i] \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 2 - 3i \end{bmatrix}$$

Problema 3. Obtenha uma fórmula para A^n , onde A é a seguinte matriz:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Problema 4. Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$?

Problema 5. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2×2 ; em particular

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{comuta com} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e com} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a = d$ e que $b = c = 0$, pelo que A é um múltiplo da matriz identidade.

Estas matrizes, conhecidas como *matrizes escalares*, são as únicas que comutam com todas as outras.

Problema 6. Seja E_5 uma matriz quadrada escalar (veja definição no problema anterior), $m \times m$, com elementos diagonais todos iguais a 5. Mostre que

1. $E_5 A = 5A$, para toda a matriz $A_{m \times n}$.
2. $B_{n \times m}$, $B E_5 = 5B$, para toda a matriz $B_{n \times m}$.

Problema 7. Quais das seguintes equações são equações lineares em x , y e z ?

- a) $x + 5y - \sqrt{2}z = 1$ b) $x^{-2} + y - 3z = -3$
 c) $x = -2y + \pi$

Problema 8. Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada por linhas? Indique as respectivas características.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ k) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ l) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 9. Determine a característica de cada uma das matrizes seguintes (i denota a unidade imaginária $\sqrt{-1}$):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 + 2i \\ -3 + i & 5 + 5i \end{bmatrix}$