Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química

1º Semestre — 13/12/2003

Nome:______________________________________
Número:____________________________ Curso:_______

Duração: 1H:30M
Cotação das perguntas de múltipla escolha: Correcta: 1.5 v. Errada: -0,5 v.
NOTA: Deve responder nos espaços em branco e no verso das folhas. Caso não tenha espaço neste enunciado pode entregar folhas adicionais devidamente **identificadas** com nome e número.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	TEM	Registo:		
PD: 7.a)	7.b)	8.	10.	T:	Nota:

---

1. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por **[1.5]**

$$T(x, y, z) = (x, y, 2z + x), \qquad S(x, y, z) = (2x - 1, y - z).$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ S e T são transformações lineares.
☐ $S \circ T$ é uma transformação linear.
☐ O espaço de chegada de $S \circ T$ é $\mathbb{R}^3$.
☐ T é uma transformação linear invertível.

---

2. Seja $T : M^{2\times 2} \to M^{2\times 2}$ a transformação linear definida no espaço linear das matrizes reais 2×2 por **[1.5]**

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ b-c & d \end{bmatrix}$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ T é sobrejectiva.
☐ T é invertível.
☐ A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T.
☐ O contradomínio de T é o subespaço linear das matrizes reais 2×2.

3. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e $B = (u, v, w)$ uma base ordenada para V, tal que $T(u+v) = 2u, T(u-2v) = v$ e $T(w) = u-v+w$. Então a matriz que representa T em relação à base B no espaço de partida e de chegada é: **[1.5]**

☐ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

4. Os valores próprios da transformação linear $T(x, y, z) = (3x, -z, y)$ são: **[1.5]**

☐ $3, 1$ e -1. ☐ $3, i$ e $-i$. ☐ $2, 1$ e -1. ☐ $0, i$ e $-i$.

---

5. Sejam u, v e w vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e A uma matriz 3×3 tal que $Au = 2u$, $Av = 0$ e $Aw = w$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ $B = (u, v, w)$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ A matriz A é invertível.
☐ A matriz A é diagonalizável.
☐ $\lambda = 1$ não é um valor próprio de A.

---

6. Considere o sistema de equações diferenciais $y' = Ay$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **[1.5]**
e $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$. Para as constantes arbitrárias C_1, C_2 e C_3, a solução geral do sistema é:

☐ Um espaço linear de dimensão 1.
☐ $y(t) = e^t \left(C_1, C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2}, C_3\right)$
☐ $y(t) = e^t \ (C_1, C_2 e^t + C_3 t e^t, C_3 e^t)$
☐ Não existe solução já que a matriz A não é diagonalizável.

---

7. Seja $T : M^{2\times 2} \to M^{2\times 2}$ a transformação linear definida, no espaço linear das matrizes reais 2×2, por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

Considere as bases ordenadas B e B' de $M^{2\times 2}$ dadas por

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (A, B, C, D)$$

e

$$B' = (A - B\,,\, A + B\,,\, C\,, D - C)\,.$$

a) Determine o núcleo e o contradomínio de T e use o resultado para dizer se T é ou não invertível. **[1.5]**

b) Determine a matriz $M(T, B, B')$, que representa T em relação à base B na partida e à base B' na chegada. **[2.0]**

---

8. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y'' + y' - 2y = -(\sin t + 3\cos t). \tag{1}$$

Mostre que $y(t) = \cos t$ é uma solução da equação diferencial (1) e determine a solução geral da equação diferencial dada. **[2.5]**

---

9. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x\,,\,y\rangle = x^T A\, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna.

a) Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

- ☐ Os vectores $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2})$ e $(1,1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2})$ e $(1,1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(-1,1)$ e $(1,1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(-1,1)$ e $(1,1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

b) Designe por $\text{proj}_v u$ a projecção ortogonal de u sobre v para o produto interno dado. Então **[1.5]**

☐ $\text{proj}_{(1,1)}(1,-1) = \frac{1}{3}(1,1)$ ☐ $\text{proj}_{(0,1)}(1,0) = (0, \frac{1}{2})$

☐ $\text{proj}_{(1,1)}(1,-1) = \frac{1}{3}(1,-1)$ ☐ $\text{proj}_{(0,1)}(1,0) = (0, \frac{-1}{2})$

---

10. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e o subespaço linear

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + 2y + z = 0\right\}.$$

Determine uma base ortonormal para W. **[2.0]**
