SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

Nota: Consultar a errata para correcção de erros de digitação em alguns enunciados.

Capítulo 1

1. a) $h(\theta_1) = 1/10$; $h(\theta_2) = 7/10$; $h(\theta_3) = 2/10$.

   b) $h(\theta_1|A) = 0.1189$; $h(\theta_2|A) = 0.7225$; $h(\theta_3|A) = 0.1586$.

   c) $h(\theta_1|A \cap A) = 0.1396$; $h(\theta_2|A \cap A) = 0.7363$; $h(\theta_3|A \cap A) = 0.1241$.

   d) Não.

3. Vide correcção na errata.

   a) $P(0) = 0.6321$; $P(A) = 0.2326$; $P(B) = 0.0855$; $P(AB) = 0.0498$.

   b) $P(0) = P(A) = P(B) = P(AB) = 0.25$.

4. $E(\theta) = 0.8630$; $Var(\theta) = 100/6$.

5. $n \geq 66$; $n \geq 714$.

6. a) $Ga(18, 6)$; c) 3.4×10^{-3}.

8. a) $g(r, c|\theta) = n(n-1)r^{n-2}, \quad (r, c) : \theta - \frac{1-r}{2} < c < \theta + \frac{1-r}{2}, \; 0 \leq r \leq 1$
   $R|\theta \sim Be(n-1, 2)$.

   c) $g(c|\theta) = \begin{cases} n\left[1 - 2(\theta - c)\right]^{n-1}, & \theta - 1/2 < c \leq \theta \\ n\left[1 - 2(c - \theta)\right]^{n-1}, & \theta \leq c < \theta + 1/2 \end{cases}.$

   e) O IC condicional em b) está contido no intervalo de valores positivos da verosimilhança e tem probabilidade *a posteriori* igual a γ, contrariamente ao IC não condicional em c).

9. a) $\hat{\theta}(X) = I_{\{2,3\}}(X)$, para ambos os casos.

   b) Funções críticas $\phi(x)$ dos 4 testes MP: $\phi_1(x) = 0$; $\phi_2(x) = I_{\{3\}}(x)$; $\phi_3(x) = I_{\{2,3\}}(x)$; $\phi_4(x) = 1$.

E_1:	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	E_2:	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
P(erro tipo I)	0	0.05	0.10	1		0	0.01	0.74	1
P(erro tipo II)	1	0.145	0.09	0		1	0.829	0.026	0

   c) $O(H_0, H_1|x) = \begin{cases} 10, & x = 1 \\ 0.91, & x = 2 \\ 0.06, & x = 3 \end{cases}$, para ambos os casos.

10. a) $(N, \sum_{i=1}^{N} X_i)$ é suf. mínima com respeito ao modelo amostral para E_1,

$$\{f(n, x_1, \ldots, x_n|\phi_1, \phi_2, \theta) = \phi_n \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},\ \phi_n, \theta \in (0,1)\},$$

onde $\sum_{n=1}^{3} \phi_n = 1$ e sendo N ancilar parcial para θ.
$Var(\sum_{i=1}^{N} X_i/N|\{\phi_n\}, \theta) = \theta(1-\theta)(\phi_1 + \phi_2/2 + \phi_3/3)$.

b) Não, atendendo a que o modelo amostral para E_2 é

$$f(n, x_1, \ldots, x_n|\theta) = \begin{cases} 1-\theta, & n = 1, x_1 = 0 \\ \theta(1-\theta), & n = 2, x_1 = 1, x_2 = 0 \\ \theta^2(1-\theta), & n = 3, x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0 \\ \theta^3, & n = 3, x_1 = x_2 = x_3 = 1 \end{cases}$$

.

c) Sim, independentemente dos ϕ_n (supostamente distintos de θ) serem conhecidos ou desconhecidos. Não. Sim.

11. a) $\Gamma_m(z^m) = I_{[1,+\infty)}(t_m)$.

b) Resposta afirmativa pois

$$L(\theta|n, z^n) = \prod_{j=1}^{n-1} \left[1 - \Gamma_j(z^j)\right] \Gamma_n(z^n) \times \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} f(t_i|\theta),$$

com $T_i|\theta \sim Exp(a(\theta)),\ a(\theta) = \begin{cases} 1/5, & \theta = 0.49 \\ 5, & \theta = 0.51 \end{cases}$

13. b) Resposta afirmativa.

15. a) Não. b) As inferências bayesianas sobre θ não usam a parte da verosimilhança dependente de ϕ, contrariamente à generalidade das inferências frequencistas pela inaplicabilidade do PSG e do PCG.

16. O PCG justifica a irrelevância da distribuição marginal do vector de frequências marginais pelo seu carácter de estatística ancilar parcial para o vector paramétrico de interesse $\{\theta_{(i)j} = \theta_{ij}/\theta_{i\cdot}\}$ que, em conjunto com $\{\theta_{i\cdot}\}$, define uma transformação biunívoca de θ.

17. b) $\tilde{\phi} = \left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)^{1/2}$, violando o PSG.

c) $h(\phi|x_1, \ldots, x_n)$ só depende dos $\{x_i\}$ através do valor de U.

19. Resposta afirmativa já que $\#\mathcal{X}_t = \binom{n+t-1}{t}$.

20. b) Sug.: Mostre que $Cov(X_i, X_j) = Var\left[E(X_i|Y)\right], \forall i \neq j$.

22. a) Sug.: Determine a distribuição do nºde brancas em n extracções (dist. de Polya) e use o método de indução.

    b) Basta considerar as variáveis X_1, X_2 e X_3.

    c) Estenda-se o argumento de a).

    d) A distribuição de Polya é a dist. da mistura Binomial-Beta de parâmetros n, $\alpha = a/c$ e $\beta = b/c$.

24. b) Deitar fora a caixa qualquer que seja o resultado do ensaio, e não há qualquer vantagem na realização deste. A decisão minimax passa a ser vender a caixa em qualquer circunstância.

    c) i. A decisão Bayes é vender a caixa em qualquer circunstância, e a realização do ensaio não se justifica.

25. a) $L(\theta, a_1) = 20000\,\theta; L(\theta, a_2) = 1200 + 3800\,\theta$.

    b) Acção Bayes $= a_2$. $R(\theta, d_c) = \begin{cases} k(\theta - \theta_L) F_{X|\theta}(c), & \theta > \theta_L \\ k(\theta_L - \theta)\left[1 - F_{X|\theta}(c)\right], & \theta \leq \theta_L \end{cases}$, onde $k = 9980 \times 1.62$.

Capítulo 2

4. a) Sim; 2.

5. b) Tome-se $\psi(\theta) = e^{\sum_{j=k+1}^{k+s} Q_j(\theta) a_j}$, para $(a_{k+1}, \ldots, a_{k+s})$ apropriado.

   c) $h(\theta|x) = \sum_{i=1}^{m} w_i^* h_i(\theta|x)$, $w_i^* = \frac{w_i f_i(x)}{\sum_{j=1}^{m} w_j f_j(x)}$, $f_i(x) = \frac{h_i(\theta) f(x|\theta)}{h_i(\theta|x)}$.

7. i) $I(\theta) = c \Rightarrow$ verificação de a); ii)$I(\theta) \propto \theta^{-2} \Rightarrow$ verificação de b).

8. a) $\psi = \sqrt{\theta}$; b) $\psi = \ln \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{1+\sqrt{1-\theta}}$; c) $\psi = \ln \theta$.

9. a) $h(\theta) \propto \prod_{i=1}^{c} \theta_i^{-1/2}$

   (Sug.: $(D_\theta - \theta\theta')^{-1} = D_\theta^{-1} + \frac{1_{c-1} 1'_{c-1}}{1 - 1'_{c-1}\theta}$; $|D_\theta - \theta\theta'| = \prod_{i=1}^{c} \theta_i$, $\theta_c = 1 - 1'_{c-1}\theta$).

10. a) $h(\theta) \propto 1/\sqrt{\theta}$, $\theta > 0$; b) $\psi \propto \sqrt{\theta}$.

12. a) $\theta|N, x \sim Be(x+1, N-x+1)$; $h(N|x) \propto (N+1)^{-1}, N \geq x$

    $N|\theta, x \overset{\mathrm{d}}{\equiv} M - 1|\theta, x$, com $M|\theta, x \sim BiN(x+1, \theta)$; b) $h(\theta|x) \propto \theta^{-1} I_{(0,1)}(\theta)$.

13. a) $$f(z|\epsilon, \delta) = \frac{c^{n-\epsilon}\Gamma(n)}{(1 + \sum\limits_{i=2}^{\epsilon} z_i + c \sum\limits_{i=\epsilon+1}^{n} z_i)^n} \equiv f(z|\epsilon),\ z_i > 0,\ i = 2, \ldots, n.$$

    A ancilaridade específica de Z para δ era previsível porque o modelo amostral faz parte da família de escala.

    b) $h(\epsilon|w, z) \propto h(\epsilon) f(z|\epsilon)(1 + \sum_{i=2}^{\epsilon} z_i + c \sum_{i=\epsilon+1}^{n} z_i)^{k-1}$.

c) Afirmação falsa em geral, como o comprova a forma de $h(\epsilon|w,z)$. Dentro da família considerada em b) para $h(\epsilon,\delta)$, apenas no caso $k=1$ é tal afirmação verdadeira.

d) Para $h(\epsilon,\delta)$ própria e bem comportada, a condição de $h(\epsilon|w,z) \equiv h(\epsilon;z)$ já implica que $h(\epsilon;z) \propto h(\epsilon)f(z|\epsilon)$.
(Sug.: Parta-se de $h(\epsilon|w,z)p(w,z) = \int f(w|z,\epsilon,\delta)f(z|\epsilon)h(\epsilon,\delta)d\delta$ e integre-se ambos os membros em ordem a w).

Capítulo 3

1. a) Para $0<x<1$, $p(x)=1/3$ e $h(\theta_1,\theta_2|x)=6(\theta_2-\theta_1)^{-4},\ \theta_1<0,\theta_2>1$.
2. c) $p(y|\{x_i\}) = \frac{B(A+m,B+y)}{(m+y)B(m,y+1)B(A,B)}, A=a+mn, B=b+\sum_i x_i$
3. a) $Bi(N-1,p)$ é a distribuição *a posteriori* de $\theta-1$ ou de θ consoante x indica macho ou fêmea, respectivamente.

   b) $E_X\left[h(\theta|X)\right]=h(\theta)$.
4. $h(N)\propto 1/N,\ N=1,2,\ldots \rightarrow h(N|x)=x/N^2,\ N=x,x+1,\ldots$.
   Moda *a posteriori*=100=EMV=1/2× mediana *a posteriori*
   (Nota: Média *a posteriori* não finita).
5. a) $h(M)=1/(N+1)\rightarrow h(M|x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N+1}{n+1}}$; b) $\frac{x+1}{n+2}$.
6. a) Sug.: Prove para cada componente de α que $E_h(\alpha_j|x)=\frac{\partial\ln\frac{p_h(x)}{g(x)}}{\partial x_j}$, onde x_j é a correspondente componente de x; d) Sug.:Tenha em conta que $\mu(\alpha)=\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}$.
9. a)IC HPD: $\left[x_1, x_1\sqrt{(1-\gamma)^{-1}}\right]$; b) 1/3.
10. c) Sug.: Considere, e.g., $\bar{x}=a$ e $c\rightarrow\infty$.
11. Use as transformações $y=x-c$ em $1-F_{Ga(a,b)}(c)$ e $y=(c-x)/c$ em $F_{Be(a,b)}(c)$.
13. $n=59$.
14. $n=10$, $\bar{x}=1.6$.
15. a) $h(\eta|x_1,\ldots,x_n)$ imprópria, $\forall n$; $h(\sigma^2|x_1,\ldots,x_n)$ própria $\forall n>1$ e imprópria para $n=1$; $h(\mu|x_1,\ldots,x_n)$ própria, $\forall n$. O uso em modelos amostrais inidentificáveis de distribuições *a priori* impróprias conduz a distribuições *a posteriori* também impróprias.

    b) $\mu|\alpha,x \sim N\left(\bar{\mu}_\alpha(x), \frac{b^2\sigma_0^2/n}{b^2+\sigma_0^2/n}\right),\ \bar{\mu}_\alpha(x)=\frac{\frac{a+\alpha}{b^2}+\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{n}{\sigma_0^2}}$;

$\alpha|x \sim N\left(\bar{\alpha}(x), \frac{d^2(b^2+\sigma_0^2/n)}{d^2+b^2+\sigma_0^2/n}\right)$;
$\alpha|\mu, x \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \alpha|\mu \sim N\left(\bar{\alpha}_\mu, \frac{b^2+d^2}{b^2d^2}\right),\ \bar{\alpha}_\mu = \frac{b^2c+d^2(\mu-a)}{b^2+d^2}$;
$\mu|x \sim N\left(\bar{\mu}(x), \frac{(b^2+d^2)\sigma_0^2/n}{b^2+d^2+\sigma_0^2/n}\right),\ \bar{\mu}(x) = \frac{\frac{a+c}{b^2+d^2}+\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{b^2+d^2}+\frac{n}{\sigma_0^2}}$.
Actualização previsível das distribuições *a priori*, marginal e condicional, de μ e consequentemente da distribuição *a priori* marginal de α, contrariamente à distribuição *a priori* condicional de α devido à inidentificabilidade do modelo.

16. b) Nota: $\hat{\theta} = 1/\bar{x}$, $\hat{\lambda} = \left[n^{-1}\sum_i(x_i^{-1} - \bar{x}^{-1})\right]^{-1}$

    IC HPD para θ : $\begin{cases} (\frac{1}{\bar{x}} \pm c(\gamma)), & \gamma : c(\gamma) \leq 1/\bar{x} \\ (0, \frac{1}{\bar{x}} \pm c(\gamma)), & c.c. \end{cases}$.

17. b) A condição de Savage não é verificada.

20. a) 1/2; b) 1/4.

21. $B(x) = \frac{b\sqrt{2}}{B_\cdot}e^{-(A_1-A_2)^2/(2B_\cdot^2)}$), com

    $B_\cdot^2 = \sum_{i=1}^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{n_i}{\sigma^2}\right)^{-1}$ e $A_i = \frac{\frac{a}{b^2}+\frac{n_i\bar{x}_i}{\sigma^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{n_i}{\sigma^2}}$, $i = 1, 2$.

22. Modelo amostral: $X|n, \alpha \sim Bi(n, \alpha) \amalg Y|m, \beta \sim Bi(m, \beta)$

    Distribuição *a priori* possível compatível com $0 < \alpha \leq \beta < 1$: $\beta \sim Be(b_1, b_2); \phi = \alpha/\beta \sim Be(a_1, a_2)$ com hiperparâmetros eliciados a partir de crenças *a priori* sobre, e. g., médias e desvios padrões de β e ϕ.

    Distribuição *a posteriori* conjunta de β e ϕ: mistura finita do produto de duas densidades *a posteriori* Beta.

    $P(\phi \leq u|x, y)$ expressável como mistura finita de funções de distribuição *a posteriori* Beta.

23. Sug.: i) $Z = X_1 - X_2,\ f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-z}I_{[0,+\infty)}(z) + \frac{1}{2}e^zI_{(-\infty,0)}(z)$

    ii) $W = X_1/X_2,\ f_W(w) = (1+w)^{-2}I_{(0,+\infty)}(w)$.

24. Os factores de Bayes numa e noutra parametrização são idênticos (a $B(x) = \frac{h_1(\gamma_0|x)}{h_1(\gamma_0)}$ como consequência da condição em a).

25. a) $h_1(\gamma) = \frac{b_1^{a_1}b_2^{a_2}\gamma^{a_1-1}}{B(a_1,a_2)(b_1\gamma+b_2)^{a_\cdot}}, \gamma > 0$
    $h_1(\phi|\gamma) \sim Ga(a_\cdot, \frac{b_1\gamma+b_2}{1+\gamma})$
    Admitindo a condição de Savage $h_0(\phi) = h_1(\phi|\gamma = 1)$,
    $B(t_1, t_2) = \frac{B(a_1,a_2)}{B(A_1,A_2)}\frac{B_1^{A_1}B_2^{A_2}}{b_1^{a_1}b_2^{a_2}}\frac{b_\cdot^{a_\cdot}}{B_\cdot^{A_\cdot}}$
    com $t_1 = \sum_i x_i$, $t_2 = \sum_i y_i$, $A_i = a_i + t_i$, $B_i = b_i + n$, $i = 1, 2$.

    b) $B_C(t_1, t_2) = \frac{f_{Bi(t,1/2)}(t_1)}{E_\gamma[f_{Bi(t,\frac{\gamma}{\gamma+1})}(t_1)]} \neq B(t_1, t_2)$, em geral, verificando-se a igualdade quando $b_1 = b_2$ com $B(t_1, t_2) = (\frac{1}{2})^{t_1+t_2}\frac{B(a_1,a_2)}{B(A_1,A_2)}$. Esta identidade justifica-se atendendo a que a estatística $T = T_1 + T_2$ é ancilar parcial para γ e ao respeito dos métodos bayesianos pelo PCG quando *a priori* $\gamma \amalg \phi$ (o que garante a sua independência *a posteriori*), condição que decorre da situação $b_1 = b_2$.

26. $B(t_1, t_2)$ idêntico ao de 3.25 no caso i) e diferente no caso ii) como consequência da condição em 3.24 a) ser satisfeita no 1ºcaso e violada no 2º.

27. De acordo com o método MM, a EBE da média *a posteriori* de θ_i é $\frac{\tilde{\tau}\tilde{\mu}+x_i}{\tilde{\tau}+m}$, $\tilde{\mu} = \frac{\bar{x}}{m}$, $\tilde{\tau} = \frac{s_n^2 - m\bar{x}(1-\frac{\bar{x}}{m})}{\bar{x}(1-\frac{\bar{x}}{m})-s_n^2}$, $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$, $i = 1, \ldots, n$.

28. b) $\hat{\theta}_i = \frac{d+x_i}{\hat{c}}$ com $\hat{c}$ dado, respectivamente, por $\frac{n}{\sum_i \ln \frac{d+x_i}{d}}$, $\frac{d+\bar{x}}{\bar{x}}$, $\frac{n-1}{\sum_i \ln \frac{d+x_i}{d}}$.

    c) $(d + x_i)E_{c|\{x_i\}}(\frac{1}{c})$.

29. $\bar{x} + \frac{1}{c}(x_i - \bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$ (via métodos dos momentos).

30. a) $N + N(N-1)\frac{\alpha+1}{c\alpha+1}$.

    b) $\frac{\tilde{\alpha}+n_i}{c\tilde{\alpha}+N}$, $i = 1, \ldots, n$, com $\tilde{\alpha} = \frac{1-T}{cT-1}$, $T = \frac{\sum_i n_i^2 - N}{N(N-1)}$.

Capítulo 4

1. b) Aplique o resultado sobre o comportamento assintótico da distribuição *a posteriori* conjunta de $\lambda = \mu_1/\mu_2$ e $\phi = \mu_2$ em termos das estimativas MV referido no Cap. 5.

2. Admitindo que as diferenças das observações emparelhadas constituem uma a.a. de um modelo Normal, a distribuição *a posteriori* de $\mu_1 - \mu_2$ evidencia que as notas pelo método tradicional tendem a ser menores do que as obtidas pelo método personalizado, ainda que as diferenças não sejam estatisticamente suficientes para invalidar a hipótese de um rendimento médio igual ($P \approx 0.13$). A conclusão é idêntica se se admitir o modelo configurado por a.a. independentes de distribuições Normais homocedásticas.

3. a) (-4.4214, 0.9614).

    b) (-4.2638, 0.8036), com grau de credibilidade 0.938.

5. a) O menor IC HPD contendo $\psi \equiv \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$, $1 \le \psi \le 5.134$, apresenta um GC 45.3%, aprox..

    b) Sob $\psi = 1$, o nível de plausibilidade relativa *a posteriori* de $\mu_1 - \mu_2 = 0$ é $P \approx 0.20$.

7. a) Sim; b) (173.95, 179.35); c) (168.52, 184,78).

8. a) Evidência a favor da igualdade de variâncias ($P \approx 0.505$) e contra a igualdade das médias no sentido de um maior valor para C ($P \approx 0$).
   b) Evidência forte ($P \approx 0$) contra a igualdade das 4 médias, a que não é alheio o resultado de diferenças significativas entre a média de A (ou de B) e cada uma das médias referentes a C e D.

Capítulo 5

1. a) $N(\frac{A-1}{B}, \frac{A-1}{B^2})$, $A = a + \sum_{i=1}^{n} x_i > 1, B = b + n$.
   b) Distr. aprox.: $\phi \sim N(\ln \frac{A}{B}, \frac{1}{A}); \psi \sim N(\left[\frac{A-1/2}{B}\right]^{1/2}, \frac{1}{4B})$.
2. $E(\lambda|\{x_i\}) = \frac{A}{B}\left(\frac{A}{A-1}\right)^{1/2} e^{-1}$.
5. a) Sug.: $E(\psi|x_1, x_2) = E(\theta_1|x_1)E(\theta_2^{-1}|x_2) = E(\theta_1|x_1)\frac{n_2}{x_2-1/2}$, se $x_2 \geq 1$.
   b) Pontos de máximo: $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_i, i = 1, 2)$, $\hat{\theta}_i = \frac{x_i-1/2}{n_i-1}$, se $0 < x_i < n_i$;
   $\theta^* = (\theta_i^*, i = 1, 2) = (\frac{x_1+1/2}{n_1}, \frac{x_2-3/2}{n_2-2})$, se $0 < x_1 < n_1 \cap 2 \leq x_2 < n_2$.
   c) $\lambda_i, i = 1, 2 \underset{iid}{\sim} U(0, \pi/2)$; Pontos de máximo:
   $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_i, i = 1, 2)$, $\hat{\lambda}_i = arcsen\sqrt{\frac{x_i}{n_i}}$;
   $\lambda^* = (\lambda_i^*, i = 1, 2) = (arcsen\sqrt{\frac{x_1+1}{n_1+1}}, arcsen\sqrt{\frac{x_2-1}{n_2-1}})$.

Capítulo 6

1. a) $n|N, \{\mu_i\} \sim M_{c-1}(N, \theta)$. Dado N, com $A \equiv \sum_{i=1}^{c} A_i = \sum_{i=1}^{c}(a_i+n_i)$ e $B = b+1$, $\sum_{j=1}^{c} \mu_j \sim Ga(A, B) \amalg (\theta_1, \ldots, \theta_{c-1}) \sim D_{c-1}(A_1, \ldots, A_{c-1}, A_c)$.
2. Considere a transformação $(\gamma_1, \ldots, \gamma_c) \leftrightarrow (\theta_1, \ldots, \theta_{c-1}, \sum_{i=1}^{c} \gamma_i)$.
3. a) Determine-se a fgm de $M = Z'n$ à custa da de n. Por escolha apropriada de Z obtêm-se as distribuições marginais, de qualquer dimensão, de componentes de n.
   b) Aplique-se a expressão do valor esperado de uma função do vector aleatório θ e tenha em conta a definição da função beta multivariada. Os momentos de 1ªe 2ªordens obtêm-se por escolha apropriada dos $\{r_i\}$.
   Considere-se $\alpha \equiv Z'\theta = \frac{Z'\gamma}{1_s'(Z'\gamma)}$, com $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_c)$ e o resultado de 6.2. Aplique-se um argumento análogo a cada π_k expressável por $\pi_k = (\frac{\gamma_i}{\sum_{j \in C_k} \gamma_j}, i \in C_k)$.
   As propriedades restantes envolvendo a transformação $(\theta_1, \ldots, \theta_{c-1}) \rightarrow (\alpha_k, k = 1, \ldots, s-1, \bar{\pi}_k, k = 1, \ldots, s)$ decorrem da relação entre as suas distribuições conjuntas, tendo em conta que o jacobiano daquela transformação é $\prod_{k=1}^{s} \alpha_k^{d_k-1}$.

c) Decorrem de a) e b).

4. a) Mostre-se que a perda esperada preditiva é $\sum_{u=0,1} L(u,a)f(u|y,z)$, com $f(u|y,z) = f(u|v)f(y|z,u)$.

   b) Condições: $k_0 = k_1$ e $f(1|v) = 1/2$.

   c) $f(u|v) \equiv f(u) = 1/2, k_0 = k_1$ e $a = 1_c$.

5. a) Considerando que as unidades amostradas são as numeradas de 1 a n (sem quebra de generalidade), $x = \sum_{k=1}^{n} U_k \amalg \theta - x = \sum_{k=n+1}^{N} U_k|\phi$, com $x|\phi \sim M_{c-1}(n,\phi),\ \theta - x|\phi \sim M_{c-1}(N-n,\phi)$ e $\phi \sim D_{c-1}(a)$.

   b) $h(\theta - x|x) = E_{\phi|x}\left[h(\theta - x|\phi)\right] \sim MD(N-n, a+x)$ porque $\phi|x \sim D_{c-1}(a+x)$.

   c) Tenha-se em conta que $\theta - x \sim MD(N-n,a),\ x|\theta,N,n \sim Hpg(\theta,N,n)$ e $\theta - x|x \sim MD(N-n,a+x)$.

6. a) A matriz jacobiana da transformação $(\theta_1,\ldots,\theta_{c-1}) \to (\phi_1,\ldots,\phi_{c-1})$, com $\theta_i = \phi_i \prod_{k=1}^{i-1}(1-\phi_k)$ e $1 - \sum_{i=1}^{c-1}\theta_i = \prod_{i=1}^{c-1}(1-\phi_i)$, é triangular inferior com determinante $\prod_{i=1}^{c-2}(1-\phi_i)^{c-i-1}$.

   b) Moda conjunta: $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_i),\ \tilde{\theta}_i = \frac{a_i - 1}{\sum_{j=1}^{c} a_j - c}$
   Modas marginais: $\hat{\theta}_i = \frac{a_i - 1}{\sum_{j=1}^{c} a_j - 2} \le \tilde{\theta}_i,\ c \ge 2$.

   c) $\rho(\theta_i,\theta_j) = -\sqrt{\frac{m_i m_j}{(1-m_i)(1-m_j)}},\ m_i = E(\theta_i)$ e a especificação da matriz de covariância exige apenas mais um hiperparâmetro.

   d) Por transformação para $\mathcal{S}_{c-1}$ do produto cartesiano de $c-1$ IC HPD para ϕ_i de gc $\gamma^{1/c-1}$, obtidos da sua distribuição marginal Beta.

7. a) Use-se sup $h(\theta) = h(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ é a moda da densidade $h(\theta)$ e o facto de $\varphi_\lambda(t)$ ser o logaritmo natural da f.g.m..

   b) Use-se a expansão assintótica do logaritmo das funções gama para chegar a

$$\varphi_\lambda(t) = \alpha_0 - \frac{c-1}{2}\ln(1-2t) + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-2t)^{-k},$$

   onde $\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ e $\alpha_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\left[\frac{B_{k+1}(c)}{(A_{.}-c)^k} - \frac{B_{k+1}(1)}{(A_i-1)^k}\right]$.
   As aproximações $\chi^2_{(c-1)}$ e $b\,\chi^2_{(c-1)}$, $b = 1 + B = 1 - \frac{2\alpha_1}{c-1}$, implicam a mesma média que resulta de se tomar a expansão de $\varphi_\lambda(t)$ até à ordem $\{(A_i-1)^{-1}\}$. A aproximação $d\,\chi^2_{(g)}$, $d = \frac{1+2B}{1+B},\ g = (c-1)\frac{(1+B)^2}{1+2B}$, já apresenta as mesmas média e variância que a referida expansão de $\varphi_\lambda(t)$, com a série reduzida ao seu 1º termo.

9. a) Considere-se os resultados da Subsec. 6.2.1 para o caso de $c = 2, m = 1, b_{11} = 1, b_{12} = -1$, e tenha-se em conta o Exerc. 6.8.

   b) Considere-se a transformação monótona que relaciona θ com $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$. Reveja-se o Exemplo 3.5 e use $Z = \frac{1}{2} \ln \phi$.

10. a) $\beta | n \sim Be(1506, 1314) \overset{a}{\sim} N(0.5341, 8.83 \times 10^{-5})$.

    c) Forte evidência ($P = 0.99$) a favor da conjectura de um dado valor para uma apropriada função linear de $\ln \theta$.

    d) Não.

11. Sug.: Invoque-se o PSG com base na suficiência parcial de n^* para os parâmetros de interesse.

12. a) Calcule-se as dp *a priori* e *a posteriori* de γ^* avaliadas em $\gamma^* = 0$. Avalie-se as dp *a priori* de ϕ e as correspondentes verosimilhanças marginais de T.

    b) T não é ancilar parcial para γ^* nem ϕ^* e γ^* são independentes *a priori*.

14. Siga-se o argumento da Subsec. 6.3.3 partindo do modelo bayesiano Produto de Multinomiais $\wedge$ Produto de Dirichlet.