REVISÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Carlos Daniel Paulino

Regra fundamental da contagem

Considere-se uma e.a. composta por $k \geq 2$ etapas, em que há m_i resultados possíveis na etapa i, $i = 1, \ldots, k$. O número total de resultados da e.a. é $m = \prod_{i=1}^{k} m_i$.

Exemplo: ϵ: Lançamentos sucessivos (um objecto de cada vez) de dois dados e uma moeda (com todas as faces distintas para cada um dos 3 objectos) $\rightarrow m = 6 \times 6 \times 2 = 72$.

Sequências ordenadas vs não ordenadas

Considere-se uma experiência de selecção de k elementos de um conjunto de n elementos. Consoante a ordem de selecção for ou não registada, assim o subconjunto de k elementos diz-se formar uma sequência ordenada ou não ordenada de dimensão k.

Tipos possíveis de extracção de k elementos de um conjunto de n elementos:

Uma extracção simultânea, k extracções simples sucessivas sem e com reposição (só os dois primeiros é que impossibilitam a eventual repetição de elementos nas sequências obtidas).

Tipos especiais de sequências

Considere-se uma experiência de obtenção de sequências de k ($k \leq n$) elementos de um conjunto de n elementos distintos.

Arranjos (simples) de n elementos tomados k a k: sequências de elementos não repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos seleccionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extracções simples sucessivas sem reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas sem reposição**.

Número de arranjos: $A_k^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Arranjos completos de n elementos tomados k a k: sequências de elementos possivelmente repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos seleccionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extracções simples sucessivas com reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas com reposição**.

Número de arranjos completos: ${A^*}_k^n = n \times n \times \ldots \times n = n^k$.

Permutações de n elementos: arranjos de n elementos tomados n a n.

Número de permutações: $P_n = A_n^n = n!$.

Combinações de n elementos tomados k a k: sequências de elementos não repetidos mas que não se distinguem umas das outras pela ordem em que os k elementos são seleccionados (diferem entre si apenas pelos elementos seleccionados).

Frequentes em esquemas de extracção simultânea. Daí corresponderem a **sequências (amostras) não ordenadas sem reposição**.

Número de combinações: $C_k^n \equiv \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Permutações de n elementos não todos distintos:

Considere-se que os n elementos são de $r > 1$ tipos, havendo k_i elementos do tipo i e indistinguíveis entre si (pelo que $n = \sum_{i=1}^{r} k_i$). O número de permutações possíveis tendo em conta a indistinguibilidade dos elementos de cada tipo é

$$P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i!}.$$

Quando $r = 2$, $P_n^{k_1,k_2} = C_{k_1}^n$.

Exemplos ilustrativos:

1. Dispondo de 4 peças de pano de cores azul, vermelho, branco e preto, respectivamente, quantas bandeiras tricolores de faixas de pano verticais se podem formar sem repetir as cores? E quantas destas têm a 1ª faixa de cor vermelha?

R: A_3^4; A_2^3

2. Seleccione-se ao acaso um grupo de k cidadãos portugueses nascidos em anos comuns. Qual o nº de sequências dos seus dias de aniversário? Quantas destas têm a particularidade de pelo menos 2 cidadãos fazerem anos no mesmo dia?

R: ${A^*}_k^{365}$; ${A^*}_k^{365} - A_k^{365}$

3. Supondo que a inspecção sucessiva do funcionamento de 6 máquinas, numeradas de 1 a 6, segue uma ordem completamente arbitrária, de quantas maneiras pode essa inspecção ser feita? Quantas destas correspondem à situação em que as 1ª e 2 ª inspeccionadas foram as máquinas 1 e 6, respectivamente?

R: P_6; P_4

4. De uma urna com pelo menos uma dezena de bolas de cada uma de várias cores (verde, amarelo, etc.) seleccionam-se ao acaso 9 delas. Quantas amostras se podem obter contendo 4 verdes e 3 amarelas? E contendo 4 verdes?

R: $P_9^{4,3,2}$;C_4^9.

Exercícios adicionais:

2.6: Uma lotaria tem 10000 bilhetes numerados de 0000 a 9999. O número do primeiro prémio é o número do bilhete saído numa extracção ao acaso.

1. Um jogador comprou um bilhete com o número 6789. Qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   R: 10^{-4}

2. Se o jogador comprar todos os bilhetes cujos números têm todos os algarismos iguais, qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

   R: 10^{-3}

3. Qual a probabilidade de o número premiado ter todos os algarismos diferentes? *(Teste 26 Nov 1994)*

   R: ${A_4}^{10}/10000 = 0.504$

2.7: Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças. Qual a probabilidade de:

1. As pessoas, dentro de cada um daqueles três grupos, estarem de seguida?

   R: $3! \times 4!3!2!/9! = 4.8 \times 10^{-3}$

2. As 2 crianças estarem juntas?

   R: $8 \times 7!2!/9! = 0.222$

2.9: De um grupo de 50 alunos do IST (10 alunos por ano) é escolhida ao acaso uma comissão coordenadora de 4 pessoas. Qual a probabilidade de:

1. Ser escolhido um e um só aluno do 1ºano?

   R:$C_1^{10}C_3^{40}/C_4^{50} = 0.429$

2. Serem escolhidos um aluno (e só um) do 1ºano e um aluno (e só um) do 5ºano?

   R: $C_1^{10}C_1^{10}C_2^{30}/C_4^{50} = 0.189$

3. Serem escolhidos no máximo dois alunos do 1ºano?

   R: $\sum_{i=0}^{2} C_i^{10} C_{4-i}^{40} / C_4^{50} = 0.978$

4. Serem todos do mesmo ano?

   R: $5 \times C_4^{10} / C_4^{50} = 5 \times 10^{-3}$

2.10: Um grupo de apostadores do totobola decidiu jogar todas as apostas possíveis contendo 7 vitórias em casa, 4 empates e 2 vitórias fora. Calcule a probabilidade desse grupo ganhar o totobola.

R: $P_{13}^{7,4,2} / {A^*}_{13}^{3} = 1.6 \times 10^{-2}$

2.11: Suponha que uma cidade tem $n+1$ habitantes e que um deles conta um boato a outro, que por sua vez o repete a um terceiro, e assim sucessivamente. Em cada passo, a pessoa que ouve o boato é escolhida ao acaso de entre as n restantes. Determine a probabilidade de que um boato seja contado r vezes:

1. Sem antes voltar a ser contado à pessoa que lhe deu início.

   R: $(\frac{n-1}{n})^{r-1}$

2. Sem que ninguém o ouça mais do que uma vez.

   R: $A_r^n / {A^*}_r^n$

CDP, Setembro 2011