

# CAOS E ORDEM

## CONTROLO DE UM PÊNDBULO INVERTIDO

### 1. PARTICIPANTES

1.1. **Eduardo Dias.** Aluno da escola secundária Domingos Sequeira de Leiria. Inscrevi-me neste estágio porque gosto de matemática e era uma boa oportunidade para aumentar os meus conhecimentos. Gostei particularmente de ter a oportunidade de ver como a matemática é feita, para além do que se faz na escola secundária.

1.2. **Leonardo Martins.** Aluno do Externato Marista de Lisboa. Inscrevi-me neste estágio porque envolve matemática e física, por ser no IST e envolver temas que me podem ser úteis no futuro. Gostei particularmente da visita ao ISR.

1.3. **David Sobral.** Aluno da escola secundária de Santo André no Barreiro. Inscrevi-me neste estágio porque queria descobrir como funciona o Instituto Superior Técnico, em particular a sua vertente de investigação. Gostei particularmente das aplicações físicas dos problemas discutidos.

1.4. **Inês Matos.** Aluna da escola secundária Francisco Franco no Funchal. Inscrevi-me neste estágio porque queria saber mais sobre matemática. Gostei particularmente da visita ao ISR e de descobrir como a matemática, mesmo modelando problemas elementares, pode requerer uma análise cuidada que não é óbvia à partida.

1.5. **Bruno Martins.** Aluno da escola secundária Padre Alberto Neto em Queluz. Inscrevi-me neste estágio porque queria observar como é feita a matemática a nível universitário. Gostei particularmente de ver a aplicação prática do que estudámos, em especial durante a visita ao ISR.

### 2. ORIENTAÇÃO CIENTÍFICA - DIOGO GOMES

Ser responsável pelo estágio promovido pelo programa Ciência Viva com o tema Caos e Ordem foi uma experiência altamente positiva.

Os cinco jovens que frequentaram o estágio encontravam-se extremamente motivados. O problema proposto consistia em projectar um controlador para um pêndulo invertido montado sobre uma calha móvel de forma a estabilizar o equilíbrio. De modo a estudar este problema de forma matemática, foi necessário ensinar aos participantes os rudimentos da teoria qualitativa de equações diferenciais: pontos de equilíbrio, retratos de fase, órbitas periódicas e homoclínicas, estabilidade e linearização perto de pontos fixos, secções de Poincaré. A parte “teórica” deste estágio decorria da parte da manhã, enquanto que durante a tarde, utilizando o programa Mathematica, os participantes puderam realizar diversas simulações, desenhar retratos de fase, secções de Poincaré, entre muitas outras actividades. Gostaria de agradecer ao Prof. Luís Barreira ter disponibilizado tempo para discutir com os participantes, durante uma manhã, diversos tópicos de sistemas dinâmicos; ao Prof. Luís Magalhães que, para além de ter dedicado uma manhã e parte de uma tarde para falar com os participantes falando não só sobre sistemas dinâmicos como também de investigação em matemática, me ajudou, com diversas discussões a organizar este projecto; ao ISR, nomeadamente ao Prof. Alexandre Bernardino pela hospitalidade e disponibilidade para fazer a visita guiada ao laboratório, que foi muito apreciada pelos participantes.

### 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Pretende-se estabilizar um pêndulo invertido colocado-o numa plataforma móvel. O pêndulo, com massa  $m$ , colocada na extremidade de uma barra rígida de comprimento  $l$ , faz um ângulo  $\theta(t)$  com a vertical. A plataforma descreve uma trajectória  $w(t)$  na coordenada horizontal. Assim, as coordenadas da massa  $m$  no instante  $t$  são

$$\begin{cases} x(t) = w(t) - l \sin \theta(t) \\ y(t) = l \cos \theta(t). \end{cases}$$

O objectivo é escolher  $w(t)$  de modo a que a posição invertida seja estável. O controlo  $w(t)$  pode depender do tempo, da posição do pêndulo ou da sua velocidade.

Para começar vamos deduzir as equações do movimento para este pêndulo. A velocidade é

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{w}(t) - l\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) = -l\dot{\theta}(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

A aceleração é dada por

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \ddot{w}(t) - l\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) + l\dot{\theta}(t)^2 \sin \theta(t) \\ \ddot{y}(t) = -l\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) - l\dot{\theta}(t)^2 \cos \theta(t). \end{cases}$$

No pêndulo actuam duas forças, a força da gravidade  $G = mg$ , vertical, apontando para baixo e a tensão  $T$  ao longo da barra. A força da gravidade tem componentes segundo o eixo do  $x$  e  $y$ , respectivamente  $G_x$  e  $G_y$ , dadas por

$$G_x = 0 \quad G_y = -mg.$$

A tensão tem componentes segundo  $x$  e  $y$ , respectivamente  $T_x$  e  $T_y$ , dadas por

$$T_x = T \sin \theta(t) \quad T_y = -T \cos \theta(t).$$

A lei de Newton diz que a aceleração num ponto multiplicada pela massa é igual à soma das forças aplicadas. Assim

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = m \left[ \ddot{w}(t) - l\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) + l\dot{\theta}(t)^2 \sin \theta(t) \right] = T \sin \theta(t) \\ m\ddot{y}(t) = m \left[ -l\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) - l\dot{\theta}(t)^2 \cos \theta(t) \right] = -mg - T \cos \theta(t). \end{cases}$$

Assim, multiplicando a primeira equação por  $\cos \theta(t)$ , a segunda por  $\sin \theta(t)$  e adicionando-as, obtemos

$$\ddot{w}(t) \cos \theta(t) - l\ddot{\theta}(t) = -g \sin \theta(t),$$

ou seja

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{l} \sin \theta(t) - \frac{1}{l} \ddot{w}(t) \cos \theta(t).$$

Para simplificar vamos considerar  $g = l = 1$ , o que dá origem à equação

$$(1) \quad \ddot{\theta}(t) = \sin \theta(t) - \ddot{w}(t) \cos \theta(t).$$

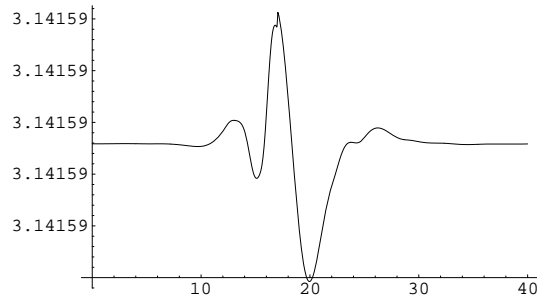
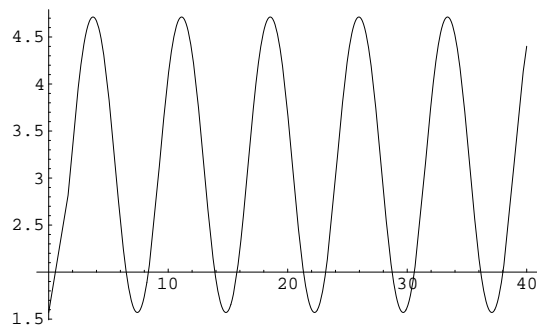
FIGURA 1. Equilíbrio estável do pêndulo ( $\theta = \pi$ ).

FIGURA 2. Órbita periódica do pêndulo.

#### 4. PÊNULO LIVRE

Foi simulada a equação (1) com  $w = 0$ , ver figuras 1-3. Desenhou-se o retrato de fase, figura 4.

A condição inicial para a órbita homoclínica, figura 3, foi obtida observando que a energia desta órbita é

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos \theta = 1$$

e, portanto, quando  $\theta = 0$  temos  $\dot{\theta} = 2$ . O retrato de fase foi obtido desenhando as curvas de nível da energia e a homoclínica corresponde à curva de nível de energia 1.

#### 5. REGULADOR DE WATT

Este pêndulo modificado tem energia

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos \theta + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta,$$

e exibe uma bifurcação de forquilha quando  $\omega = 1$ . Desenharam-se os retratos de fase para  $\omega = 0.5, 1, 2$ , figuras 5-7.

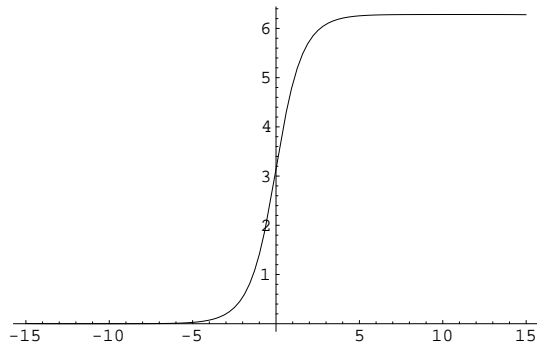


FIGURA 3. Órbita homoclínica.

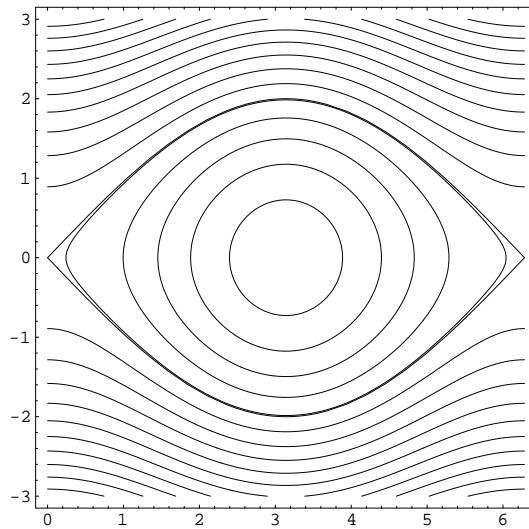


FIGURA 4. Retrato de fase do pêndulo.

### 6. PÊNDULO COM CICLO LIMITE

Consideramos a equação do pêndulo modificada

$$\ddot{\theta} + \eta\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos \theta - \lambda\right)\dot{\theta} - \sin \theta = 0.$$

Esta equação exibe um ciclo limite que é definido por

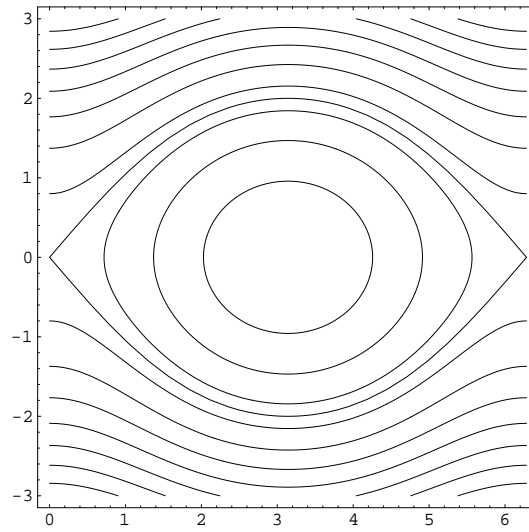
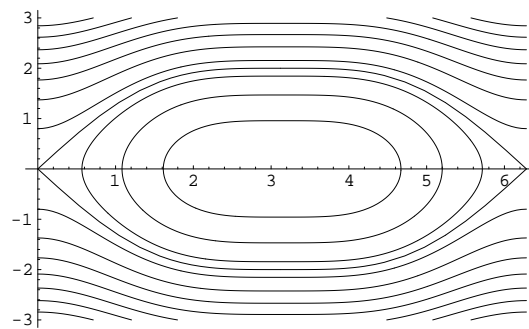
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos \theta = \lambda.$$

De facto, se considerarmos a energia

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos \theta,$$

temos

$$\frac{dE}{dt} = -\eta\dot{\theta}^2(E - \lambda)$$

FIGURA 5. Regulador de Watt  $\omega = 0.5$ .FIGURA 6. Regulador de Watt  $\omega = 1.0$ .

Assim, quando  $\eta$  se torna positivo este sistema exhibe uma bifurcação de Hopf apresentando uma órbita periódica, como se pode ver nas figuras 8 e 9.

## 7. PÊNULO FORÇADO

Considere oscilações perto do equilíbrio estável. Utilize  $\lambda \sin \gamma t$ . Desenhe a secção de Poincaré. Agora considere condições iniciais perto do ponto instável. Desenhe a secção de Poincaré. Obtivemos um filme das secções de Poincaré para diversos valores de  $\lambda$  que pode ser visto na internet em <http://www.math.ist.utl.pt/~dgomes/movie1.gif>.

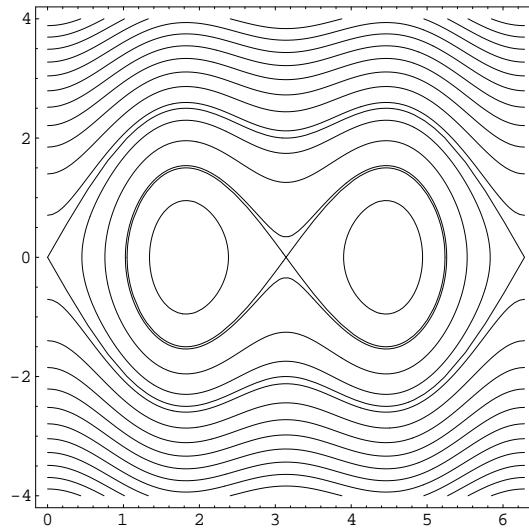


FIGURA 7. Regulador de Watt  $\omega = 2.0$ .

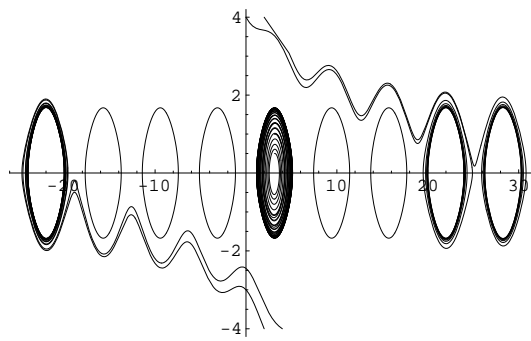


FIGURA 8. Pêndulo com ciclo limite  $\lambda = 0.4$ ,  $\eta = 0.05$

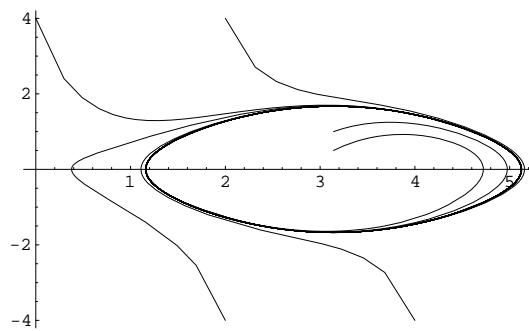
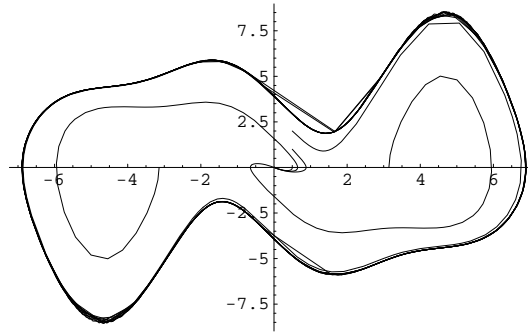


FIGURA 9. Pêndulo com ciclo limite  $\lambda = 0.4$ ,  $\eta = 1$

FIGURA 10. Controlo linear  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ 

### 8. CONTROLO LINEAR

Finalmente, para estabilizar o pêndulo sobre o carrinho, vamos considerar leis de controlo lineares

$$\ddot{w} = \alpha\theta + \beta\dot{\theta}.$$

Estas dão origem à equação

$$\ddot{\theta} = \sin\theta - (\alpha\theta + \beta\dot{\theta})\cos\theta.$$

A parte linear é

$$\ddot{\theta} = \theta - \alpha\theta - \beta\dot{\theta}.$$

As raízes características deste sistema, obtidas considerando soluções da forma

$$\theta(t) = e^{\lambda t}$$

satisfazem a equação

$$\lambda^2 + \beta\lambda + (\alpha - 1) = 0,$$

ou seja

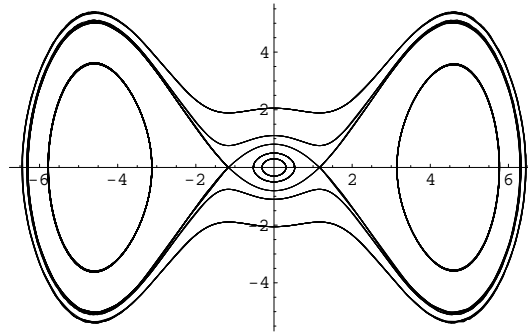
$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}.$$

Consequentemente, se  $\alpha > 1$  todas as soluções são estáveis para  $\beta > 0$ . Quando  $\alpha = \beta = 2$ , o retrato de fase é ilustrado na figura 10. No caso  $\beta = 0$  e  $\alpha > 1$  as raízes são imaginárias, o que corresponde, quando  $\alpha = 2$ , ao retrato de fase ilustrado na figura 11.

### 9. VISITA AO INSTITUTO DE SISTEMAS E ROBÓTICA

Durante o estágio houve a oportunidade de visitar o Instituto de Sistemas e Robótica. Nesta visita observaram-se diversos modelos incluindo um pêndulo invertido estabilizado com auxílio de um sistema de controlo semelhante ao estudado neste estágio; um sistema de levitação magnética com um controlador óptico; um sistema de uma bola numa



FIGURA 11. Controlo linear  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ 

calha com controlador digital; sistemas de navegação utilizando reconhecimento óptico, bem como diversos projectos de alunos da licenciatura de engenharia electrotécnica e computadores. Gostaríamos de agradecer ao Instituto de Sistemas e Robótica e, em particular, ao Prof. Alexandre Bernardino a hospitalidade e disponibilidade para fazer a visita guiada ao laboratório.