

# **Distribuições e Transformações**

## **Integrais**

Diogo Aguiar Gomes



## Índice

1. Porquê Distribuições?	5
2. Conceitos preliminares	11
1. Noções de convergência	11
2. Espaços de Banach	15
3. Espaços $L^p$	17
3. Distribuições	21
1. Espaços de funções e de distribuições	21
2. Exemplos de Distribuições	22
3. Transposição, produto, diferenciação	24
4. Cálculo de derivadas de distribuições	26
5. Propriedades elementares da convolução	28
6. Espaços de Sobolev - I	30
7. Suporte e ordem de distribuições	36
4. Teoremas de Estrutura	41
1. Teorema de Riesz para espaços de Hilbert	41
2. Teorema de Radon-Nikodym	47
3. Decomposição de Riesz-Markov	49
4. Dualidade em $L^p$	51
5. Teorema de representação de Riesz	53
6. Teorema de Hahn-Banach	57
7. Estrutura local de distribuições	60
8. Estrutura global de distribuições e aproximação	61
9. Distribuições com suporte num ponto e divisão	62
10. Aplicações a equações diferenciais	64
11. Produto tensorial	66
12. Convolução e soluções fundamentais	67
13. Álgebras de convolução	71
5. Transformada de Fourier	73
1. Transformada de Fourier no espaço de Schwartz	73

2.	Teorema de Plancherel	81
3.	Teorema de Paley-Wiener	83
4.	Espaços de Sobolev - II	84
6.	Séries de Fourier	91
1.	Fórmula de soma de Poisson	91
2.	Séries de Fourier	94
3.	Decaimento de séries de Fourier	98
4.	Núcleo de Dirichlet e convergência pontual	101
5.	Núcleo de Fejér	104
7.	Interpolação	107
1.	Interpolação de Riesz-Thorin	107
A.	Testes	113
.	Bibliografia	117

## Porquê Distribuições?

A teoria das distribuições estuda funcionais lineares contínuos em espaços de funções. Nesta introdução, discutiremos, informalmente, alguns exemplos elementares e a sua motivação.

Consideremos o problema de minimizar o funcional

$$I[u] = \int_{\Omega} |Du|^2,$$

sobre todas as funções  $u$  definidas num conjunto  $\Omega$  com interior não vazio e que na fronteira  $\partial\Omega$  tomam valores prescritos:

$$u|_{\partial\Omega} = g.$$

Suponhamos que existe um mínimo  $u$  de  $I[u]$  de classe  $C^2$ . Então, dada uma função de teste  $v \in C_c^2(\Omega)$ , a função

$$i(\epsilon) = I[u + \epsilon v]$$

tem um mínimo para  $\epsilon = 0$ . Portanto,  $i'(0) = 0$ , ou seja,

$$(1) \quad \int_{\Omega} Du \cdot Dv = 0.$$

Utilizando o teorema da divergência, obtemos

$$(2) \quad \int_{\Omega} (\Delta u)v = 0,$$

para todo o  $v \in C_c^2(\Omega)$ , o que implica

$$(3) \quad \Delta u = 0,$$

em  $\Omega$ . Mas, em princípio, o mínimo de  $I[u]$  pode não ser de classe  $C^2$ , pois apenas é requerido que tenha derivada  $Du \in L^2$ . Ainda assim, queremos dar sentido a (3). Vamos definir que  $\Delta u = 0$ , no sentido fraco ou, equivalentemente, no sentido das distribuições, se (1) for verificada para todo o  $v \in C_c^1(\Omega)$ . Deu-se, assim, significado à segunda derivada de uma função sem que esta tenha que existir no sentido clássico.

O segundo exemplo é o seguinte: seja  $f(x)$  uma função  $C_c^2(\mathbb{R})$ . Vamos definir

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |y| f(x-y) dy.$$

Como se mostra no próximo exercício  $u_{xx} = f$ .

EXERCÍCIO 1. *Mostre que*

$$(4) \quad u_{xx}(x) = f(x).$$

Por mudança de variável,

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x-z| f(z) dz.$$

A derivada de  $\frac{1}{2}|x-z|$  é

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2}|x-z| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x > z \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x < z, \end{cases}$$

pelo que a segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{1}{2}|x-z| \right] = 0,$$

quase em toda a parte. Com esta observação, seríamos tentados a concluir que

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x-z| f(z) dz = 0,$$

o que, se o leitor já verificou (4), é obviamente falso. Isto sugere que

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{2}|x-z| = \delta(x-z),$$

onde o “objecto”  $\delta$ , o delta de Dirac, teria as seguintes propriedades:

$$\delta(y) = 0,$$

para  $y \neq 0$ , e

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(y) \phi(y) dy = \phi(0).$$

Deste modo,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{2}|x-z| \right) f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-z) f(z) dz = f(x).$$

No entanto, se  $\delta = 0$  quase em toda a parte e fosse uma função, teríamos  $\int_{\mathbb{R}} \delta = 0$ . Portanto, não o podemos definir como função. Vamos interpretá-lo como um “objecto” que, quando associado a uma função, ou mais precisamente, aplicado a uma função satisfaz:

$$\text{“} \int_{\mathbb{R}} \delta \phi \text{”} = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

A aplicação

$$\phi \mapsto \phi(0)$$

é linear no conjunto das funções contínuas e toma valores em  $\mathbb{R}$ . A uma aplicação linear de um espaço vectorial em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  chama-se um *funcional linear*.

Consideremos a equação das ondas:

$$(5) \quad u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Uma solução explícita desta equação é dada no próximo exercício:

EXERCÍCIO 2. *Seja  $f$  uma função de classe  $C^2$ . Mostre que a função*

$$(6) \quad u(x, t) = f(x - t)$$

*satisfaz (5).*

No entanto, mesmo quando  $f$  não é de classe  $C^2$ , a expressão (6) representa uma onda que se propaga a velocidade 1. É, portanto, importante definir um conceito de solução fraca que englobe estas soluções. Vamos observar o seguinte: se  $u$  for de classe  $C^2$  e  $v \in C_c^2$  então

$$\int_{\mathbb{R}} (u_{tt} - u_{xx})v = \int_{\mathbb{R}} (v_{tt} - v_{xx})u,$$

após duas integrações por partes. Assim, se  $u$  é solução de (5), temos

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}} (v_{tt} - v_{xx})u = 0,$$

para todo o  $v \in C_c^2$ . Mas esta fórmula faz sentido desde que  $u$  seja uma função integrável. Assim, definimos que uma função integrável  $u$  é uma solução fraca da equação das ondas (5) se (7) for verificada para todo o  $v \in C_c^2$ .

EXERCÍCIO 3. *Verifique que (6) define uma solução fraca da equação das ondas para qualquer função  $f$  integrável.*

EXERCÍCIO 4. *Mostre que as soluções fracas de classe  $C^2$  são soluções clássicas de (5).*

EXERCÍCIO 5. *Seja  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . Mostre que a aplicação definida para  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  dada por*

$$\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_{tt} - \phi_{xx})u$$

*é um funcional linear.*

Nos exemplos anteriores, as derivadas generalizadas não aparecem isoladamente mas sim com funcionais lineares. O delta de Dirac não pode ser interpretado como uma função mas sim como um objecto que actua em funções devolvendo o seu valor na origem. As soluções fracas das equações de Laplace e das ondas são definidas por integração contra uma função de teste. Ao longo destas notas, iremos estudar certos funcionais lineares, as distribuições, que são contínuos num sentido apropriado. Como iremos ver, as distribuições generalizam funções e é possível definir operações como a diferenciação, dando um sentido preciso aos cálculos efectuados nesta introdução.

Estas notas foram escritas para a disciplina de Transformações Integrais e Distribuições da licenciatura em Matemática Aplicada e Computação do Instituto Superior Técnico. Assim, foi incluído um número elevado de exercícios, dos quais, uma fracção significativa destes foi resolvida nas aulas prática. Esta versão incorpora muitas correcções e sugestões de diversos colegas meus, Pedro Girão, Luís Magalhães, João Palhoto Matos, Luísa Ribeiro e Jorge Silva, entre outros, aos quais não posso deixar de agradecer. O António Serra, no entanto, merece uma menção especial pois leu cuidadosamente o manuscrito original apontando uma quantidade enorme de gralhas e erros bem como sugerindo diversas alterações que, sem dúvida, contribuíram para uma maior clareza do texto. Obviamente a bibliografia desta cadeira não se limita a estas notas. Sobre a teoria geral de distribuições, sugere-se a consulta de [Vie] e [Fri98]. Para alguns resultados sobre teoria da medida e análise real, os livros [Fol99] e [Roy88]. Quanto a espaços de Sobolev [Bre83] e [Eva98]. Muito do material sobre séries de Fourier



pode ser encontrado em [Kat76] ou [Wil95]. No que diz respeito a tópicos mais avançados de análise harmónica sugere-se, por exemplo, [SW71],[Ste70], [Ste93].



## Conceitos preliminares

### 1. Noções de convergência

Seja  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Uma noção de convergência para sequências em  $E$  é um critério que permite decidir quais as sucessões  $(x_n)$  de termos em  $E$  são convergentes, associar-lhe um único número, o seu limite,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Seja  $x \in E$ . A sucessão constante  $x_n = x$  é convergente para  $x$ .
2. As subsucessões de uma sucessão convergente são convergentes para o mesmo limite.
3. Se  $(x_n) \subset E$  é uma sucessão convergente para  $x \in E$  então  $\lambda x_n$  também é convergente para  $\lambda x$ , para qualquer escalar  $\lambda$ .
4. Se  $(x_n), (y_n) \subset E$  são sucessões convergentes para  $x$  e  $y$ , respectivamente, então  $x_n + y_n$  é uma sucessão convergente para  $x + y$ .

EXERCÍCIO 6. *Verifique que a noção de convergência usual em  $\mathbb{R}^n$  satisfaz as propriedades anteriores.*

Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma noção de convergência. Um conjunto  $F$  diz-se *fechado* se para qualquer sequência  $(x_n) \subset F$  convergente se tem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$ . O *fecho*  $\bar{D}$  de um conjunto  $D \subset E$  é o menor subconjunto fechado de  $E$  que contém  $D$ . Um conjunto  $D$  diz-se *denso* em  $E$  se  $\bar{D} = E$ .

EXERCÍCIO 7. *Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma noção de convergência. Mostre que:*

1.  $E$  e  $\emptyset$  são conjuntos fechados;

2. a intersecção de uma colecção arbitrária de conjuntos fechados é fechada;
3. a reunião finita de conjuntos fechados é fechada.

Um conjunto diz-se *aberto* se o seu complementar é fechado.

EXERCÍCIO 8. *Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma noção de convergência. Mostre que o conjunto de todos os abertos forma uma topologia, isto é,*

1.  $E$  e  $\emptyset$  são conjuntos abertos;
2. a reunião de uma colecção arbitrária de conjuntos abertos é aberta;
3. a intersecção finita de conjuntos abertos é aberta.

NOTA. *Em geral, dada uma topologia num espaço vectorial (compatível com a estrutura de espaço vectorial) é possível associar-lhe uma noção de convergência para sequências e, portanto, por este exercício, associar-lhe uma nova topologia. Estas podem ser distintas. Este problema pode ser evitado utilizando redes em vez de sequências. Estes assuntos serão objecto de estudo aprofundado na disciplina de Topologia.*

Um funcional linear em  $E$  é uma aplicação linear  $L : E \mapsto \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Se no espaço  $E$  existir uma noção de convergência para sequências, um funcional linear  $L$  em  $E$  diz-se *contínuo* se

$$x_n \rightarrow x \implies L(x_n) \rightarrow L(x).$$

Devido à linearidade, é suficiente verificar que  $x_n \rightarrow 0$  implica

$$L(x_n) \rightarrow 0,$$

pois  $L(x_n) \rightarrow L(x)$  se e somente se  $L(x_n - x) \rightarrow 0$ . O espaço dual  $E'$  de  $E$  é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em  $E$ . Seja  $L \in E'$  e  $x \in E$ . A imagem de  $x$  por  $L$  denota-se por  $L(x)$ ,  $\langle L, x \rangle$  ou  $Lx$  e usaremos indistintamente estas três notações.

O conjunto  $E'$  é um espaço vectorial dotado da seguinte noção de convergência: uma sequência  $L_n \in E'$  converge para  $L \in E'$  se, para

todo o  $x \in E$ ,

$$L_n(x) \rightarrow L(x).$$

EXERCÍCIO 9. *Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma noção de convergência e  $F$  um subespaço de  $E$ . Mostre que  $E' \subset F'$ .*

EXERCÍCIO 10. *Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma noção de convergência. Mostre que  $E \subset E''$  através da inclusão canónica  $\iota : E \mapsto E''$  :*

$$(8) \quad \iota_x(y) \equiv y(x),$$

para todo o  $x \in E$  e  $y \in E'$ .

Um espaço vectorial  $E$  diz-se reflexivo se a inclusão canónica de  $E$  em  $E''$  dada por (8) é um isomorfismo.

Seja  $E$  um espaço vectorial. Uma *seminorma*  $|\cdot|_*$  em  $E$  é uma aplicação de  $E \mapsto \mathbb{R}_0^+$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. (desigualdade triangular)  $|x + y|_* \leq |x|_* + |y|_*$ , para  $x, y \in E$ .
2.  $|\alpha x|_* = |\alpha| |x|_*$  para todo o escalar  $\alpha$ .

Uma *norma*  $\|\cdot\|$  em  $E$  é uma seminorma para a qual  $\|x\| = 0$  implica  $x = 0$ .

EXERCÍCIO 11. *Seja  $E$  um espaço vectorial e  $|\cdot|_*$  uma seminorma. Mostre que*

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right|_* \leq \sum_{k=1}^n |x_k|_*.$$

EXEMPLO 1. Seja  $E$  um espaço vectorial normado. A noção de convergência induzida pela norma é a seguinte:  $u_n \rightarrow u$  se  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ . A primeira e segunda propriedade são evidentes. Para verificar a terceira propriedade seja  $u_n \rightarrow u$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Então

$$\|\lambda u_n - \lambda u\| = |\lambda| \|u_n - u\| \rightarrow 0.$$

Para mostrar última propriedade sejam  $u_n$  e  $v_n$  sucessões convergentes para, respectivamente,  $u$  e  $v$ . Então

$$\|u_n + v_n - u - v\| \leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \rightarrow 0.$$



EXEMPLO 2. Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de uma família de seminormas  $|\cdot|_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , para algum conjunto de índices  $A$ .  $E$  diz-se um espaço seminormado se, para cada  $x \in E \setminus \{0\}$ , existe  $\alpha$  tal que  $|x|_\alpha > 0$ . Uma sucessão diz-se convergente em  $E$  se, para cada  $\alpha$ ,

$$|x_n - x|_\alpha \rightarrow 0.$$



EXERCÍCIO 12. Seja  $E$  um espaço seminormado. Uma sucessão diz-se uniformemente convergente para  $x$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} |x_n - x|_\alpha \rightarrow 0.$$

Mostre que esta é uma noção de convergência e que em geral é distinta da do exemplo 2.

EXERCÍCIO 13. Seja  $E = L^1(\mathbb{R})$ . Uma sucessão  $(f_n) \subset E$  diz-se fracamente convergente se para todo o  $g \in C_c(\mathbb{R})$

$$\int g f_n \rightarrow \int g f.$$

Mostre que esta é uma noção de convergência e que não é a induzida pela norma em  $L^1$ . **Sugestão:** mostre que existem sucessões  $(f_n)$  fracamente convergentes para 0, mas tais que  $\|f_n\|_{L^1} \not\rightarrow 0$ .

EXERCÍCIO 14. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  espaços vectoriais normados e seja  $E$  o espaço vectorial de todas as transformações lineares  $T : F_1 \rightarrow F_2$  tais que existe uma constante  $C$  para a qual

$$\|Tx\|_{F_2} \leq C\|x\|_{F_1},$$

para todo o  $x \in F_1$ . Mostre que as seguintes são noções de convergência:

(1)  $T_n \rightarrow T$  se

$$\sup_{\|x\|_{F_1} \leq 1} \|Tx - T_n x\|_{F_2} \rightarrow 0.$$

(2)  $T_n \rightarrow T$  se para cada  $x \in F_1$

$$\|Tx - T_n x\| \rightarrow 0.$$

(3)  $T_n \rightarrow T$  se para cada  $x \in F_1$  e  $L \in F_2'$  se tem

$$L(Tx - T_n x) \rightarrow 0.$$

Mostre que se  $F_1$  e  $F_2$  tiverem dimensão finita todas estas noções são equivalentes. E se a dimensão for infinita?

## 2. Espaços de Banach

Seja  $E$  um espaço vectorial normado e  $(x_k) \subset E$  uma sucessão convergente para  $x \in E$ . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m_1, m_2 \geq n} \|x_{m_1} - x_{m_2}\| = 0.$$

EXERCÍCIO 15. *Demonstre a afirmação anterior.*

A uma sucessão com esta propriedade chama-se *sucessão de Cauchy*. Em geral, num espaço vectorial normado as sucessões de Cauchy podem não ser convergentes. Um espaço vectorial normado diz-se *completo* ou de *Banach* se qualquer sucessão de Cauchy for convergente. Embora todos os espaços vectoriais normados de dimensão finita sejam espaços de Banach, o mesmo não se passa em dimensão infinita.

EXERCÍCIO 16. *Mostre que todos os espaços vectoriais normados com dimensão finita são completos. Mostre que o espaço das funções  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dotado da norma  $L^2$  não é completo.*

É importante estabelecer critérios para decidir se certos espaços são ou não completos. Em seguida apresentamos um destes resultados.

Uma série  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  diz-se *absolutamente convergente* se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty.$$

TEOREMA 1. *Um espaço vectorial normado  $E$  é completo se e somente se qualquer série absolutamente convergente é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos uma série absolutamente convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  e suponhamos que  $E$  é completo. Seja  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  a sucessão das somas parciais. Para mostrar que a série é convergente é

suficiente mostrar que  $S_n$  é uma sucessão de Cauchy. Pela desigualdade triangular

$$\|S_{n+m} - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x_k\|,$$

uma vez que a série  $\sum \|x_k\|$  é convergente, esta desigualdade implica que  $S_n$  é uma sucessão de Cauchy.

Por outro lado, seja  $y_n$  uma sucessão de Cauchy.

EXERCÍCIO 17. *Seja  $y_n$  uma sucessão de Cauchy tal que uma sua subsucessão  $y_{n_k}$  é convergente. Mostre que  $y_n$  é convergente.*

Pelo exercício anterior, basta mostrar que existe uma subsucessão convergente. Como  $y_n$  é uma sucessão de Cauchy, é possível escolher uma subsucessão  $y_{n_k}$  tal que

$$\|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\| \leq 2^{-k}.$$

Podemos escrever

$$y_{n_k} = y_{n_1} + \sum_{j=1}^k (y_{n_{j+1}} - y_{n_j}).$$

A série  $\sum_{j=1}^{\infty} (y_{n_{j+1}} - y_{n_j})$  é absolutamente convergente. Portanto, a hipótese implica que  $y_{n_k}$  é convergente. ■

No caso de  $E$  ser um espaço vectorial normado, uma aplicação linear de  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se um *funcional linear contínuo* se

$$(9) \quad |Lf| \leq C\|f\|,$$

para todo o  $f \in E$ . O conjunto dos funcionais lineares contínuos em  $E$  denota-se também  $E'$ . Como seria de esperar, esta definição é equivalente à que utiliza a noção de convergência associada à norma, como mostra o próximo exercício:

EXERCÍCIO 18. *Seja  $E$  um espaço vectorial normado. Verifique que a definição de funcional linear contínuo em (9) é equivalente à que utiliza a noção de convergência associada à norma.*

EXERCÍCIO 19. *Seja  $E$  um espaço vectorial normado. Mostre que a aplicação  $|\cdot| : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$*

$$|L| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} L(x)$$



é uma norma em  $E'$ .

### 3. Espaços $L^p$

Esta secção tem como objectivo rever alguns factos elementares sobre espaços  $L^p$ . Muitos destes resultados já foram estudados em disciplinas anteriores e, portanto, são familiares à maioria dos leitores. Assim, a sua leitura não substitui o estudo detalhado de teoria da medida e a consulta de fontes tais como [Ric] ou [Roy88]. Estas notas assumem um bom conhecimento da teoria de integração elementar: mensurabilidade, integral de Lebesgue, teoremas da convergência monótona e dominada, teorema de Fubini. Como revisão, apresentaremos apenas um breve sumário de outros resultados essenciais, pelo que só as demonstrações mais complexas são apresentadas com detalhe, sendo as restantes deixadas como exercício.

Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto mensurável não vazio e  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço  $L^p(U)$  é o conjunto das funções mensuráveis  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  que verificam  $\|f\|_{L^p} < \infty$ , onde, se  $p < \infty$

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_U |f|^p \right)^{1/p},$$

ou, se  $p = \infty$ ,

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{esssup } |f|.$$

As normas  $\|\cdot\|_{L^p}$  são de facto normas (exercício 24), a única dificuldade em estabelecer este facto consiste em provar a desigualdade triangular. No entanto, isto segue da desigualdade de Minkowski (exercício 23), que se prova utilizando algumas desigualdades elementares que recordamos em seguida e cuja prova é deixada como exercício (exercícios 20 e 21).

**EXERCÍCIO 20.** *Demonstre a desigualdade de Young: seja  $1 < p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , então para  $a, b \in \mathbb{R}$*

$$(10) \quad |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'}.$$

*Sugestão: para  $a, b > 0$  escreva*

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{p}{p} \ln a + \frac{p'}{p'} \ln b},$$

e use a convexidade da exponencial.

EXERCÍCIO 21. Mostre que para  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , se tem

$$\left| \int gh \right| \leq \|g\|_{L^p} \|h\|_{L^{p'}}.$$

Esta é a desigualdade de Hölder. Sugestão: aplique a desigualdade de Young (10) com  $a = \lambda g$  e  $b = \frac{h}{\lambda}$  e optimize sobre  $\lambda$ .

EXERCÍCIO 22. Mostre que

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} \int fg,$$

para  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . **Sugestão:** Considere o caso em que  $f$  é uma função simples e seguidamente utilize um argumento de aproximação.

EXERCÍCIO 23. Prove a desigualdade de Minkowski, isto é

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Sugestão: observe que

$$\int |f + g|^p \leq \int |f + g|^{p-1} (|f| + |g|)$$

e aplique a desigualdade de Hölder.

EXERCÍCIO 24. Mostre que as normas  $L^p$  são de facto normas.

EXERCÍCIO 25. Seja  $f(x, t) : \mathbb{R}^d \times [a, b]$  uma função contínua com suporte compacto. Mostre que

$$\left\| \int_a^b f(x, t) dt \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \int_a^b \|f(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} dt.$$

TEOREMA 2. Os espaços  $L^p$  são completos.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 1, basta mostrar que qualquer série absolutamente convergente em  $L^p$  é convergente. O caso  $p = \infty$  é bastante simples e é deixado como exercício.

EXERCÍCIO 26. Mostre que  $L^\infty$  é completo.

Para  $1 \leq p < \infty$  consideremos uma série  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  absolutamente convergente em  $L^p$  e seja  $S_n$  a sucessão das somas parciais. Queremos mostrar que  $S \in L^p$  e que

$$\|S_n - S\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Em primeiro lugar, pela desigualdade de Minkowski,

$$\left\| \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p}.$$

e, portanto,

$$\int \left| \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right|^p \leq C,$$

independentemente de  $n$ . Logo, pelo teorema da convergência monótona,

$$T_n = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

é finita para quase todo o  $x$  e converge para uma função  $T$  em  $L^p$ . Portanto,  $S_n(x)$  converge para uma função  $S(x)$  para quase todo o  $x$  e

$$|S_n - S|^p \leq |T|^p.$$

Assim, podemos aplicar o teorema da convergência dominada para mostrar que  $\|S_n - S\|_{L^p} \rightarrow 0$ . ■

**EXERCÍCIO 27.** *Dê um exemplo de uma sucessão  $u_n$  convergente em  $L^p$  que diverge quase em toda a parte.*

**EXERCÍCIO 28.** *Seja  $u_n \in L^p$  uma sucessão convergente em  $L^p$ . Mostre que existe uma subsucessão  $u_{n_k}$  que converge quase em toda a parte.*

**EXERCÍCIO 29.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto de medida finita. Mostre que se  $p < q$  então  $L^q(U) \subset L^p(U)$ . Mostre que se  $U$  não tem medida finita esta inclusão é falsa. Mostre que a inclusão inversa é sempre falsa, excepto em casos triviais.*

**EXERCÍCIO 30.** *Mostre que as funções contínuas com suporte compacto são densas em  $L^p$ .*

**EXERCÍCIO 31.** *Considere o funcional definido em  $C_c(\mathbb{R}^d)$  por*

$$\psi \mapsto L\psi = \psi(0).$$

*Mostre que não existe nenhuma extensão contínua de  $L$  a  $L^p$ , sempre que  $1 \leq p < \infty$ .*

EXERCÍCIO 32. *Seja  $K \subset \mathbb{R}^d$ . Mostre que  $C(K)$  é um espaço completo quando dotado da norma do supremo.*

## Distribuições

### 1. Espaços de funções e de distribuições

Em teoria de distribuições é frequente utilizar os espaços de funções  $C^k(\mathbb{R}^d)$  e os espaços de funções de classe  $C^k$  com suporte compacto,  $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ , com  $0 \leq k \leq \infty$ . O espaço  $C^\infty$  é também denotado por  $\mathcal{E}$  e  $C_c^\infty$  por  $\mathcal{D}$ . Dado um subconjunto aberto não vazio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  definem-se de modo análogo os espaços  $C^k(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $C_c^k(\Omega)$  e  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Todos estes espaços podem ser dotados de noções de convergência. É usual considerar as seguintes: uma sucessão de funções  $\phi_n$  converge em  $C^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) para  $\phi$  se, para  $m < k + 1$  e cada compacto  $K$ ,

$$\|\phi_n - \phi\|_{C^m(K)} \rightarrow 0,$$

onde  $\|\cdot\|_{C^m(K)}$  é definida por

$$\|\psi\|_{C^m(K)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \psi\|_{L^\infty(K)},$$

e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  denota um multiíndice genérico.

Uma sequência de funções  $\phi_n$  converge em  $C_c^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) para  $\phi$  se existir um compacto fixo  $K$  tal que  $\text{supp } \phi, \text{supp } \phi_n \subset K$  e, para  $m < k + 1$ , se tem:

$$\|\phi_n - \phi\|_{C^m(K)} \rightarrow 0.$$

A existência de um compacto fixo contendo o suporte de todas as funções  $\phi_n$  é crucial. Com efeito, excluindo-a a noção de convergência é a de  $C^k$ . No entanto, o conjunto  $C_c^k$  não é completo com esta noção de convergência, como mostra o próximo exercício.

**EXERCÍCIO 33.** *Seja  $\phi$  uma função com suporte compacto. Mostre que, quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\phi(x/k) \rightarrow \phi(0)$  em  $C(\mathbb{R})$  mas não em  $C_c(\mathbb{R})$ .*

É importante observar que estes dois exemplos de noções de convergência são casos particulares do exemplo 2.

O conjunto dos funcionais lineares contínuos em  $C^k$  (resp.  $C_c^k$ ) é o espaço dual  $(C^k)'$  (resp.  $(C_c^k)'$ ). No caso  $k = \infty$ , escreve-se  $\mathcal{E}'$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ). Aos elementos destes espaços chamamos *distribuições*, muito embora alguns autores reservem esta terminologia para os elementos de  $\mathcal{D}'$ . Por razões que serão óbvias mais tarde, os elementos de  $\mathcal{E}'$  chamam-se distribuições de suporte compacto.

## 2. Exemplos de Distribuições

EXEMPLO 3. Seja  $f \in L^1$ . Vamos definir a aplicação

$$\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle \equiv \int f \phi,$$

para  $\phi \in \mathcal{D}$ . Claramente este é um funcional linear. Temos

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C \|f\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty}.$$

Portanto, se  $\phi_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}$  então

$$|\langle f, \phi_n \rangle| \rightarrow 0.$$

Pelo que a distribuição associada a  $f$  é um elemento de  $\mathcal{D}'$ . ◀

O exemplo anterior mostra que funções podem ser identificadas com distribuições. Assim, dizemos que uma distribuição  $u$  é uma função se existir uma função, que, por abuso de notação, denotaremos também por  $u$ , tal que

$$\langle u, \phi \rangle = \int u \phi.$$

EXERCÍCIO 34. Seja  $f \in L^1$ . Mostre que, em geral,  $f \notin \mathcal{E}'$ .

EXERCÍCIO 35. Mostre que cada  $f \in L_{loc}^1$  define uma distribuição em  $\mathcal{D}'$  por

$$\phi \mapsto \int f \phi.$$

EXEMPLO 4. Consideremos a seguinte aplicação, o delta de Dirac,  $\delta$ ,

$$\phi \mapsto \langle \delta, \phi \rangle \equiv \phi(0),$$

definida para  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . O funcional  $\delta$  está bem definido e é linear. Apenas resta mostrar continuidade para provar que  $\delta$  é um elemento de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Para esse efeito, seja  $\phi_n$  uma sucessão que converge em  $\mathcal{D}$  para 0. Então, em cada compacto,  $\phi_n$  converge uniformemente para 0. Portanto

$$\langle \delta, \phi_n \rangle = \phi_n(0) \rightarrow 0,$$

como queríamos demonstrar.  $\blacktriangleleft$

EXERCÍCIO 36. *Mostre que*

$$\phi \mapsto \langle \delta', \phi \rangle \equiv -\phi'(0),$$

*é um elemento de  $\mathcal{D}'$ .*

EXEMPLO 5. Consideremos a aplicação linear, o valor principal de  $\frac{1}{x}$ , dada por

$$\phi \mapsto \langle \text{pv } \frac{1}{x}, \phi \rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x},$$

para  $\phi \in \mathcal{D}$ . Escrevendo

$$\int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} = \int_{x > \epsilon} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx,$$

é fácil verificar que este limite existe. Deste modo,  $\text{pv } \frac{1}{x}$  está bem definido e é obviamente linear. Falta mostrar continuidade, ou seja, que dado  $\phi_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}$  então

$$\langle \text{pv } \frac{1}{x}, \phi_n \rangle \rightarrow 0.$$

Para isso vamos reescrever

$$\int_{x > \epsilon} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx = \int_{\epsilon}^1 \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

O primeiro termo pode ser estimado por

$$\left| \int_{\epsilon}^1 \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \right| \leq C \|D\phi\|_{L^{\infty}},$$

e o segundo por

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^{\infty}},$$

onde esta última constante depende do suporte de  $\phi$ . Com estas estimativas é fácil mostrar a continuidade.  $\blacktriangleleft$

EXERCÍCIO 37. *Diga, justificando, quais dos seguintes são elementos de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ :*

1.  $\phi \mapsto \int \phi$ ;
2.  $\phi \mapsto 1 + \phi(0)$ ;
3.  $\phi \mapsto \langle L, \psi \rangle$ , onde  $L \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$  e  $\psi(x, y) = \phi(x + y^2)$ ;
4.  $\phi \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} \frac{\phi}{x^3}$ ;
5.  $\phi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (\phi(\frac{1}{n^2}) - \phi(0))$ ;
6.  $\phi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} D^n \phi(n)$ ;
7.  $\phi \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi/2} \frac{\phi(x)}{\sin x} + \phi(0) \ln \epsilon$ .

### 3. Transposição, produto, diferenciação

Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços vectoriais dotados de uma noção de convergência. Um operador linear  $T : E \mapsto F$  diz-se *contínuo* se para qualquer sucessão  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , se tem  $Tx_n \rightarrow Tx$  em  $F$ .

Dado  $L \in F'$ , o funcional  $L \circ T$  é um elemento de  $E'$  (verificar!). O *operador transposto*  $T^t$  de  $T$ ,

$$T^t : F' \mapsto E',$$

é definido por

$$T^t L \equiv L \circ T,$$

para todo o  $L \in F'$ .

**EXERCÍCIO 38.** *Seja  $T$  um operador linear contínuo  $T : E \mapsto F$ . Mostre que  $T^t$  é um operador linear contínuo de  $F'$  em  $E'$ .*

A transposição de operadores lineares permite estender a distribuições diversas operações tais como o produto por funções, diferenciação ou composição.

Por transposição podemos definir o produto de uma distribuição por uma função tal como é discutido no exercício seguinte:

**EXERCÍCIO 39.** *Seja  $f \in \mathcal{E}$  e considere a aplicação*

$$\phi \mapsto M_f \phi = f \phi.$$

- (1) *Verifique que  $M_f$  é sequencialmente contínua de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$  e de  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}$ .*



(2) *Mostre que, se  $u \in \mathcal{D}'$  é uma função, então  $M_f^t u = fu$ , o produto usual de funções.*

Portanto, para  $u \in \mathcal{D}'$  definimos a multiplicação por  $f$ ,  $M_f^t u$ , que, para simplificar notação, denotamos por  $fu$ , através de

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle.$$

As derivadas parciais  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  fornecem exemplos de operadores lineares contínuos de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$  ou de  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}$ .

EXERCÍCIO 40. *Verifique que as derivadas parciais são contínuas de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$ .*

As derivadas parciais de uma distribuição  $L$  são definidas através de:

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i} L, \phi \rangle = -\langle (\frac{\partial}{\partial x_i})^t L, \phi \rangle = -\langle L, \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \rangle.$$

A razão para o sinal negativo é a seguinte: se  $f \in C^1$  e a distribuição  $L$  for dada por

$$L(\phi) = \int f\phi,$$

temos, aplicando integração por partes sobre a coordenada  $x_i$ ,

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i} L, \phi \rangle = \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi.$$

A composição com um difeomorfismo é também um exemplo de um operador linear contínuo de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}$ .

EXERCÍCIO 41. *Seja  $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Mostre que*

$$T_\Theta \phi = \phi \circ \Theta$$

*é um operador linear contínuo de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$ . Seja  $f \in L^1$  encarado como uma distribuição em  $\mathcal{D}'$ . Calcule  $T_\Theta^t f$ .*

EXERCÍCIO 42. *Mostre que o Laplaciano  $\Delta$  é um operador linear contínuo de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$ . Mostre que o operador  $\Delta^T : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$  quando restrito a  $\mathcal{D}$  é novamente o Laplaciano.*

EXERCÍCIO 43. *Considere o operador  $D = \frac{d}{dx} : \mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+)$ . Calcule a restrição de  $D^t$  a  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+)$ .*

#### 4. Cálculo de derivadas de distribuições

EXEMPLO 6. Seja  $\delta$  a distribuição delta de Dirac em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . A sua derivada no sentido das distribuições,  $\delta'$ , é dada por

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0).$$

◀

EXEMPLO 7. Seja  $f = \ln |x|$ . Como  $f \in L^1_{\text{loc}}$ , podemos definir uma distribuição em  $\mathcal{D}'$  através de

$$\phi \mapsto \int \ln |x| \phi(x) dx.$$

A derivada no sentido das distribuições é, pela definição,

$$\phi \mapsto - \int \ln |x| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) dx.$$

No entanto, como  $\ln |x|$  não é diferenciável em  $x = 0$ , não é possível utilizar integração por partes para simplificar esta expressão. Portanto há que proceder com algum cuidado. Para esse efeito vamos reescrever

$$\begin{aligned} - \int \ln |x| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{|x| > \epsilon} \ln |x| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ [\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)] \ln \epsilon + \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} \phi(x) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} \phi(x), \end{aligned}$$

uma vez que  $[\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)] \ln \epsilon \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ou seja, a derivada de  $\ln |x|$  no sentido das distribuições é a distribuição pv  $\frac{1}{x}$  estudada no exemplo 5. ◀

EXEMPLO 8. Consideremos, para  $d > 2$ , em  $\mathbb{R}^d$  a função  $u = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ . Vamos mostrar que, em  $\mathcal{D}'$ ,

$$\Delta u = c_d \delta,$$

onde  $c_d$  é uma constante que depende da dimensão do espaço. É importante observar que  $\Delta u = 0$  se  $x \neq 0$ . Este exemplo mostra que há que proceder com cuidado ao diferenciar uma distribuição dada por uma função que não é globalmente diferenciável, mesmo quando a diferenciabilidade só falha num único ponto.

Por definição (ver exercício 42)

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \int u \Delta \phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\Delta \phi(x)}{|x|^{d-2}} dx,$$

para  $\phi \in \mathcal{D}$ . Atendendo a que  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ , utilizando o teorema da divergência, temos

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\epsilon} \frac{\nabla \phi(x) \cdot \nu}{|x|^{d-2}} dS - \int_{|x| > \epsilon} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \frac{1}{|x|^{d-2}} dx,$$

onde  $\nu$  é a normal exterior a  $|x| > \epsilon$ . O primeiro destes termos converge para zero. Integrando por partes o segundo, e usando  $\Delta u = 0$  se  $x \neq 0$ , obtemos

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{|x|=\epsilon} \phi(x) \nabla \frac{1}{|x|^{d-2}} \cdot \nu dS = c_d \phi(0),$$

como pretendido. ◀

EXERCÍCIO 44. Calcule a derivada e o Laplaciano no sentido das distribuições de:

1.  $\text{pv } \frac{1}{x}$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ;
2.  $\ln |1 - x^2|$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ;
3.  $\ln(x^2 + y^2)$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

EXERCÍCIO 45. Seja  $\tau_h \phi(x) = \phi(x+h)$  e vamos definir  $\tau_h : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$  por  $\tau_h L = \tau_{-h}^t L$ , para  $L \in \mathcal{D}'$ . Mostre que para  $L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se tem

$$\frac{\tau_h L - L}{h} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x},$$

quando  $h \rightarrow 0$ .

EXERCÍCIO 46. Seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ . Mostre que

$$D(fu) = (Df)u + fDu.$$

EXERCÍCIO 47. Mostre que

$$x^k \delta^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m < k \\ \frac{(-1)^k m!}{(m-k)!} \delta^{m-k} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

EXERCÍCIO 48. Mostre que

$$\frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} \rightarrow \delta,$$

em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

EXERCÍCIO 49. Seja  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ . Mostre que

$$\int f(x) \frac{e^{-\pi \frac{|x|^2}{\epsilon^2}}}{\epsilon^d} dx \rightarrow f(0).$$

EXERCÍCIO 50. Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , com  $\int f dx = 1$ . Mostre que  $\lambda f(\lambda x) \rightarrow \delta$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

EXERCÍCIO 51. Seja  $f_k \in L^1_{loc}$  uma sucessão de funções verificando:

- (1)  $f_k \geq 0$
- (2)  $\text{supp } f_k \subset \{|x| \leq k^{-1}\}$
- (3)  $\int f_k = 1$ .

Mostre que  $f_k \rightarrow \delta$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . Mostre que  $f_k^2$  não converge no sentido das distribuições (a título de curiosidade mostre que primeira hipótese não é necessária para estabelecer este facto). Informalmente isto significa que “ $\delta^2$ ” não faz sentido!

EXERCÍCIO 52. Dê um exemplo de uma função  $f \in L^1_{loc}$  tal que  $f^2 \notin L^1_{loc}$ .

## 5. Propriedades elementares da convolução

A *convolução* de duas funções  $f$  e  $g$  é definida por

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy.$$

Obviamente,  $(f * g)(x)$  só está definida para os valores de  $x$  para os quais o integral converge.

EXERCÍCIO 53. Mostre que se  $f, g \in L^1$  então  $f * g \in L^1$ .

Uma sucessão de funções  $\rho_n$  diz-se uma *sucessão regularizante* se

1.  $\rho_n \in C^\infty$ ;
2.  $\rho_n \geq 0$ ;
3.  $\int \rho_n = 1$ ;
4.  $\text{supp } \rho_n \subset B_{1/n}(0)$ .

Como mostra o exercício seguinte, é relativamente simples de construir uma sucessão regularizante:

EXERCÍCIO 54. *Seja  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  uma função não negativa com suporte em  $B_1(0)$  e satisfazendo*

$$\int \rho dx = 1.$$

*Mostre que*

$$(11) \quad \rho_n = n^d \rho(nx)$$

*é uma sucessão regularizante.*

PROPOSIÇÃO 1. *Seja  $f \in L^1$ . Então*

1.  $f * \rho_n \in C^\infty$ . *Adicionalmente,  $D(f * \rho_n) = f * D\rho_n$  e, se  $f \in C^1$ ,  $D(f * \rho_n) = Df * \rho_n$ .*
2.  $\text{supp } f * \rho_n \subset \text{supp } f + B_{1/n}(0)$
3.  $f \in C^k$  *então  $f * \rho_n \rightarrow f$  em  $C^k(K)$  para cada compacto  $K$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar o primeiro ponto vamos observar que

$$|D_x(f(y)\rho_n(x-y))| \leq \left[ \max_z |D\rho_n(z)| \right] |f(y)| \in L^1.$$

Portanto, podemos passar a derivada para o interior do integral e obter

$$D_x \int f(y)\rho_n(x-y)dy = \int f(y)D\rho_n(x-y)dy.$$

Aplicação repetida do mesmo argumento implica, por indução, que  $\rho_n * f \in C^\infty$ . No caso de  $f$  ser de classe  $C^1$ , procedendo de modo similar, obtém-se

$$D_x \int f(x-y)\rho_n(y)dy = \int [D_x f(x-y)] \rho_n(y)dy.$$

Para mostrar o segundo ponto é suficiente observar que, para

$$x \notin \text{supp } f + B_{1/n}(0),$$

se tem

$$f(x-y)\rho_n(y) \equiv 0,$$

para todo o  $y$ .

O último ponto pode ser provado do seguinte modo: assumindo que  $f$  é contínua, mostraremos que

$$\rho_n * f \rightarrow f,$$

uniformemente em cada compacto; uma vez estabelecido este facto, segue de primeira parte que, para funções  $C^1$ ,

$$D(\rho_n * f) = \rho_n * Df \rightarrow Df,$$

uniformemente em cada compacto. Procedendo por indução obtemos o caso  $C^k$ .

Para mostrar convergência uniforme, vamos recordar que, em cada compacto  $\tilde{K}$ , a função  $f$  é uniformemente contínua. Portanto, existe uma função  $\omega(\delta)$ , o módulo de continuidade de  $f$ , não decrescente, com  $\omega(0) = 0$ , tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|),$$

se  $x, y \in \tilde{K}$ . Assim, dado um compacto  $K$ , seja  $\tilde{K} = K + \bar{B}_{1/n}(0)$ .

$$|f(x) - (\rho_n * f)(x)| \leq \int |f(x) - f(x - y)| \rho_n(y) dy \leq \omega(1/n).$$

■

## 6. Espaços de Sobolev - I

Os elementos de  $\mathcal{D}'$  têm um grau de diferenciabilidade insuficiente para muitas aplicações. Assim, há por vezes necessidade de considerar espaços de distribuições com um grau de diferenciabilidade mais elevado. Os espaços de Sobolev são espaços de funções cujas derivadas no sentido das distribuições ainda são funções e que satisfazem condições adicionais de integrabilidade. Nesta secção vamos provar alguns resultados elementares sobre espaços de Sobolev; o seu estudo será desenvolvido na secção 4 do capítulo 5.

Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto com fronteira  $\partial U$  regular. Os *espaços de Sobolev*,  $W^{1,p}(U)$ , são espaços de funções  $u \in L^1_{loc}(U)$  tais que a derivada no sentido das distribuições  $Du \in L^1_{loc}(U)$  e que satisfazem

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} \equiv \|u\|_{L^p(U)} + \|Du\|_{L^p(U)} < \infty.$$

De modo similar, os espaços  $W^{m,p}(U)$  são espaços de funções  $u$  tais que todas as derivadas no sentido das distribuições  $D^\alpha u$ , com  $|\alpha| \leq m$  são elementos de  $L^p$ . Estes espaços são dotados da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}.$$

Os espaços  $W^{m,p}$  são espaços de Banach, como se mostra na próxima proposição:

TEOREMA 3. *Os espaços  $W^{m,p}(U)$  são espaços de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $u_n$  uma sucessão de Cauchy em  $W^{m,p}(U)$ . Como  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy em  $L^p$ , existe  $u \in L^p$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p$ . De modo similar, cada uma das derivadas  $D^\alpha u_n$ , com  $|\alpha| \leq m$ , é uma sucessão de Cauchy em  $L^p$  e, portanto, converge para alguma função  $v_\alpha$ . É suficiente mostrar que

$$D^\alpha u = v_\alpha.$$

Para esse efeito seja  $\phi \in \mathcal{D}(U)$ . Então

$$\int (D^\alpha u_n) \phi = (-1)^{|\alpha|} \int u_n D^\alpha \phi.$$

Tomando o limite  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\int v_\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int u D^\alpha \phi,$$

ou seja,  $D^\alpha u = v_\alpha$ . ■

As funções de classe  $C^\infty$  são densas tanto nos espaços  $L^p$  como nos espaços de Sobolev.

LEMA 1. *Seja  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Então  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  é denso em  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\epsilon > 0$ . Para provar o teorema é suficiente mostrar que existe uma função  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tal que

$$\|f - g\|_{L^p} < \epsilon.$$

Dado  $f \in L^p$  existe  $h_1 \in L^p$  com suporte compacto  $K$  tal que

$$\|f - h_1\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Existe também uma função contínua  $h_2$  com suporte compacto tal que

$$\|h_1 - h_2\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

A funções  $\rho_n * h_2$  convergem uniformemente para  $h_2$  e têm suporte contido num compacto fixo  $\tilde{K}$  ligeiramente maior que  $K$ . Portanto, para  $n$  suficientemente grande,

$$\|h_2 - \rho_n * h_2\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Utilizando a desigualdade triangular temos

$$\|f - \rho_n * h_2\|_{L^p} < \epsilon.$$

Portanto, escolhendo  $g = \rho_n * h_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , obtemos o resultado desejado. ■

**EXERCÍCIO 55.** *Seja  $u \in L^p$ . Utilize a Proposição 1 para mostrar que  $\rho_n * u \rightarrow u$  em  $L^p$ .*

**EXERCÍCIO 56.** *Decida se  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{E}$  são densos em  $L^\infty$ .*

**TEOREMA 4.** *Seja  $u \in W^{m,p}(U)$ . Então existe uma sequência de funções  $u_m \in C^\infty(U) \cap C(\bar{U})$  tal que*

$$\|u_m - u\|_{W^{m,p}} \rightarrow 0.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** A prova deste teorema é dividida nos seguintes exercícios (ver também [Eva98])

**EXERCÍCIO 57.** *Considere o caso  $U = \mathbb{R}^d$  e seja  $u_n = \rho_n * u$ . Use o exercício 55 para mostrar que  $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p$ .*

No caso de  $U$  não ser  $\mathbb{R}^d$  é necessário ter cuidado pois a convolução  $\rho_n * u$  pode não estar definida. Utilizando uma partição de unidade sobre a fronteira podemos escrever  $u = u_0 + u_1$  em que  $u_0$  tem suporte compacto em  $U$  e  $u_1$  tem suporte numa vizinhança suficientemente pequena da fronteira. Basta mostrar que é possível aproximar  $u_0$  e  $u_1$  por funções em  $C^\infty(U) \cap C(\bar{U})$

**EXERCÍCIO 58.** *Consideremos o caso em que  $u$  tem suporte compacto em  $U$ . Seja, para  $i$  inteiro positivo,*

$$V_i = \left\{ x \in U : \frac{1}{i+2} < \text{dist}(x, \partial U) < \frac{1}{i} \right\}.$$



Seja  $\eta_i$  uma partição de unidade subordinada a  $V_i$  e aplique o exercício anterior a  $u\eta_i$ , de forma a mostrar que existe  $w_i \in \mathcal{D}$  tal que

$$\|u\eta_i - w_i\|_{W^{m,p}} \leq \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Mostre que  $w = \sum w_i \rightarrow u$  em  $W^{m,p}$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e que  $w \in C^\infty(U) \cap C(\bar{U})$ .

Seguidamente tratamos o outro caso:

EXERCÍCIO 59. Consideremos agora o caso em que  $u$  tem suporte numa vizinhança suficientemente pequena da fronteira. Localmente a fronteira de  $\partial U$  pode ser escrita como um gráfico

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e, localmente  $U = \{x_n > f\}$ . Utilize uma partição de unidade  $\xi_i$  sobre a fronteira e defina  $u_i^\epsilon(x_1, \dots, x_n) = \xi_i(x)u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \epsilon)$ . Aplique os resultados anteriores.

■

É também importante o seguinte espaço:

$$W_0^{m,p}(U) \equiv \text{fecho de } \mathcal{D}(U) \text{ em } W^{m,p}(U).$$

EXERCÍCIO 60. Mostre que se  $f \in \mathcal{D}$  e  $u \in W^{m,p}$  então  $fu \in W_0^{m,p}$ .

EXERCÍCIO 61. Mostre que  $|x| \in W^{1,2}([0, 1])$ .

EXERCÍCIO 62. Seja  $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$  um difeomorfismo com derivada com inversa limitada e  $u \in W^{1,p}$ . Mostre que  $u \circ \psi \in W^{1,p}$ .

EXERCÍCIO 63. Seja  $\psi$  de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  com  $\psi'$  limitada. Seja  $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ . Mostre que  $\psi(u) \in W^{1,p}(B_1(0))$  e que  $D(\psi(u)) = \psi'(u)Du$ .

EXERCÍCIO 64. Seja  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$  uma solução clássica de

$$u_t = u_{xx},$$

tal que  $u(\cdot, t) \in W^{1,p}$  para cada  $t \geq 0$ . Mostre que  $\|u(\cdot, t)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}$ .

**6.1. Resultados complementares.** Para terminar esta discussão preliminar sobre espaços de Sobolev, enunciamos em seguida alguns resultados adicionais. Seguiremos de perto o livro [Eva98] e só apresentaremos os enunciados dos teoremas e alguns exercícios, omitindo as demonstrações.

6.1.1. *Teorema do Traço.* Em geral, as funções em  $L^p$  não têm valores definidos em conjuntos de medida nula, uma vez que  $L^p$  é um espaço de classes de equivalência de funções. É, portanto, surpreendente que se possa determinar (no sentido definido no próximo teorema) o valor na fronteira de uma função em  $W^{m,p}$ .

TEOREMA 5 (Teorema do traço). *Se  $U \subset \mathbb{R}^d$  for limitado e  $\partial U$  de classe  $C^1$ , então existe uma aplicação linear contínua  $T$ , o traço em  $\partial U$ ,*

$$T : W^{1,p}(U) \mapsto L^p(\partial U)$$

*tal que  $Tu = u|_{\partial U}$  para  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ .*

Uma versão deste teorema e a sua prova serão discutidas mais tarde utilizando a transformada de Fourier.

6.1.2. *Teoremas de Sobolev e Morrey.* Tal como o teorema anterior mostra, funções em espaços de Sobolev gozam de algumas propriedades especiais. O próximo teorema, desigualdades de Sobolev e Morrey, pode ser explicado informalmente do seguinte modo: em espaços de Sobolev há um controlo tanto sobre o valor médio da função,  $\|u\|_{L^p}$ , como das suas derivadas,  $\|\nabla u\|_{L^p}$ . Este controlo implica, dependendo da dimensão do espaço, estimativas adicionais sobre o “crescimento da função” e, portanto,  $u$  está num espaço  $L^{p^*}$ , com  $p^* > p$ , ou estimativas sobre a “oscilação da função” e logo  $u$  é Hölder contínua.

TEOREMA 6 (Teorema de Sobolev-Morrey). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um domínio limitado e  $u \in W^{1,p}(U)$ . Então, se*

- (1)  $1 \leq p < d$ ,  $u \in L^{p^*}$ , com  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ ;
- (2)  $p = d$ ,  $u \in L^q$ ,  $1 \leq q < \infty$ ;
- (3)  $d < p < \infty$ ,  $u \in C^\alpha$ , onde  $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ .

6.1.3. *Compacidade.* Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach. Um operador linear  $T : E \rightarrow F$  diz-se compacto se a imagem  $Tx_n$  de qualquer sucessão limitada  $x_n$  contém uma subsucessão convergente. Em particular, se  $E \subset F$  é importante decidir se a injeção  $I : E \rightarrow F$  definida por  $Ix = x$  é compacta.

TEOREMA 7 (Rellich - Kondrachov). *Se  $U \subset \mathbb{R}^d$  for limitado e  $1 \leq p < d$  então a injeção  $W^{1,p} \subset L^q$ , com  $1 \leq q < p^*$  é compacta.*

É de esperar que sempre que se tenha um controlo sobre o valor médio de uma função ou o seu valor na fronteira e sobre a derivada, se possa controlar a norma em  $W^{1,p}$ , esta é a ideia da desigualdade de Poincaré.

TEOREMA 8 (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $U$  compacto, conexo e com fronteira  $C^1$ . Se  $\int_U u = 0$  ou  $u \in W_0^{1,p}$  então existe  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|Du\|_{L^p}.$$

EXERCÍCIO 65. *Demonstre a desigualdade de Poincaré utilizando o teorema de Rellich-Kondrachov. Sugestão: se o teorema não fosse verdade, existiria  $u_k$  tal que*

$$\int u_k = 0 \quad \text{ou} \quad u_k \in W_0^{1,p}$$

*e  $1 = \|u_k\|_{L^p} \geq k \|Du_k\|_{L^p}$ . Mostre que  $u_k \rightarrow u$  em  $W^{1,p}$ , através de alguma subsequência. Mostre que  $Du = 0$  e  $\|u\|_{L^p} = 1$ .*

6.1.4. *Aplicações a cálculo de variações.*

EXERCÍCIO 66. *Considere o problema:*

$$\min_{u \in W_0^{1,2}} \int |Du|^2 + fu$$

1. *Mostre que qualquer sucessão minimizante  $u_k$  é limitada em  $W_0^{1,2}$ .*
2. *Mostre que através de uma subsequência  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2$  e em quase toda a parte.*
3. *Mostre que, através de uma subsequência, se necessário,  $Du_k \rightharpoonup Du$  em  $L^2$ .*

4. *Utilize a desigualdade*

$$\int |Du_k|^2 \geq \int |Du|^2 + 2Du(Du_k - Du)$$

e a convergência fraca de  $Du_k$  para mostrar que  $u$  é um mínimo do problema.

6.1.5. *Quocientes diferenciais.* As derivadas de funções em  $W^{1,p}$  podem ser aproximadas por quocientes diferenciais, tal como as derivadas no sentido clássico, ou no sentido das distribuições (ver exercício 45).

Seja  $u \in W^{1,p}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ . O quociente diferencial de  $u$  na direcção  $e_i$  é:

$$D_i^h u = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

TEOREMA 9 (Quocientes diferenciais). *Seja  $1 \leq p < \infty$  e  $u \in W^{1,p}(U)$ . Se  $V$  é um aberto com fecho compacto em  $U$  então*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

Por outro lado, se  $u \in L^p$  e

$$\sup_h \|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C,$$

então  $u \in W^{1,p}(V)$ .

TEOREMA 10 (Rademacher). *Seja  $f$  uma função Lipschitz em  $\mathbb{R}^d$ . Então  $f$  é diferenciável quase em toda a parte.*

## 7. Suporte e ordem de distribuições

O suporte de uma função contínua  $f$  é o fecho do conjunto dos pontos  $x$  tais que  $f(x) \neq 0$ :

$$\text{supp } f = \text{cl}\{x : f(x) \neq 0\}.$$

De outro modo,  $x \notin \text{supp } f$  se e somente se existir uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f \equiv 0$  em  $U$ . Seja  $L$  uma distribuição. Diz-se que um ponto  $x$  não pertence ao *suporte* de  $L$  se existir uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que, para todo o  $\phi$  satisfazendo

$$\text{supp } \phi \subset U,$$

se tem

$$L(\phi) = 0.$$

Assim, se a distribuição  $L$  for uma função contínua  $f$ , o seu suporte coincide com o suporte de  $f$ .

EXERCÍCIO 67. *Mostre que o suporte de uma distribuição é um conjunto fechado.*

EXERCÍCIO 68. *Seja  $f$  uma função em  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Mostre que o suporte da distribuição em  $\mathcal{D}'$  definida por  $f$ , isto é,*

$$\langle f, \phi \rangle = \int f \phi,$$

*é o suporte essencial de  $f$ , ou seja, o complementar do maior aberto onde  $f$  é identicamente nula quase em toda a parte.*

EXERCÍCIO 69. *Seja  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$  dada por*

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1/k}.$$

*Determine  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tal que  $\text{supp } u \subset [0, \infty)$  e  $u = v$  em  $\mathbb{R}^+$ . Mostre que existe mais do que uma extensão com estas propriedades.*

PROPOSIÇÃO 2. *Seja  $L \in \mathcal{D}'$  e  $\phi \in \mathcal{D}$ . Se  $\text{supp } \phi \cap \text{supp } L = \emptyset$  então*

$$L\phi = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $K = \text{supp } \phi$  com  $K \cap \text{supp } L = \emptyset$ . Para cada ponto  $x$  de  $K$  existe uma vizinhança aberta  $U_x$  tal que, para  $\eta \in C_c^\infty$  com

$$\text{supp } \eta \subset U_x,$$

se tem

$$L\eta = 0.$$

$\{U_x, x \in K\}$  é uma cobertura de  $K$ . Como  $K$  é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita. Seja  $\eta_i$  uma partição de unidade subordinada a esta subcobertura. Então, como  $\phi = \sum_i \eta_i \phi$ ,

$$L \left( \sum_i \eta_i \phi \right) = \sum_i L(\eta_i \phi) = 0.$$

■

PROPOSIÇÃO 3. *As distribuições em  $\mathcal{E}'$  têm suporte compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Por contradição, vamos supor que  $L \in \mathcal{E}'$  não tem suporte compacto. Então, existe uma sequência de funções  $\phi_n$  com  $\text{supp } \phi_n \cap B_n(0) = \emptyset$  para as quais

$$L(\phi_n) \neq 0.$$

Por linearidade, podemos assumir  $L(\phi_n) = 1$  após normalização conveniente. Porém,  $\phi_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{E}$ , o que é uma contradição. ■

EXERCÍCIO 70. *Seja  $L \in \mathcal{D}'$  uma distribuição com suporte compacto. Mostre que existe uma única extensão de  $L$  a  $\mathcal{E}$ .*

Seja  $L \in \mathcal{D}'$ . Diz-se que  $L$  tem *ordem localmente finita* se, para cada compacto  $K$ , existe  $N$  inteiro e  $C > 0$  tais que para  $\phi \in \mathcal{D}$  com  $\text{supp } \phi \subset K$ , se tem

$$|L(\phi)| \leq C \|\phi\|_{C^N(K)}.$$

Uma distribuição  $L \in \mathcal{D}'$  diz-se de *ordem finita* se o inteiro  $N$  é independente do compacto. O sub-conjunto de  $\mathcal{D}'$  das distribuições de ordem finita  $N$  denota-se por  $\mathcal{D}'^N$ .

PROPOSIÇÃO 4. *As distribuições em  $\mathcal{D}'$  têm ordem localmente finita.*

DEMONSTRAÇÃO. Caso esta estimativa não fosse verdadeira, existiria um compacto  $K$  e uma sequência de funções  $\phi_n$  com suporte em  $K$  tais que

$$|L(\phi_n)| \geq C_n \|\phi_n\|_{C^n(K)},$$

com  $C_n \rightarrow \infty$ . Definindo

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{\sqrt{C_n} \|\phi_n\|_{C^n(K)}},$$

obtemos  $\psi_n \rightarrow 0$ . No entanto

$$|L(\psi_n)| \rightarrow \infty,$$

o que contradiz a continuidade. ■

EXERCÍCIO 71. *Mostre que  $\mathcal{D}'^N \subsetneq \mathcal{D}'^{N+1}$ . Decida se  $\cup_N \mathcal{D}'^N = \mathcal{D}'$ .*

EXERCÍCIO 72. *Mostre que as distribuições com suporte compacto têm ordem finita.*

Provas semelhantes às anteriores mostram que as distribuições em  $(C^N)'$  têm suporte compacto e que os elementos  $L \in (C_c^N)'$  satisfazem, para funções  $\phi$  com suporte num compacto fixo,  $\|L(\phi)\| \leq C\|\phi\|_{C^N}$ .

Uma série

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

de elementos  $u_k \in \mathcal{D}'$  diz-se convergente se para cada  $\phi \in \mathcal{D}$  a série

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k, \phi \rangle$$

é convergente.

EXERCÍCIO 73. *Mostre que*

$$L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

*é um elemento de  $\mathcal{D}'$ .*

EXEMPLO 9. A distribuição

$$L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

é um elemento de  $\mathcal{D}'$ . No entanto, como não tem suporte compacto, não pertence a  $\mathcal{E}'$ . ◀

EXEMPLO 10. A distribuição

$$\phi \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi^{(n)}(n),$$

que é um elemento de  $\mathcal{D}'$ , tem ordem localmente finita mas não tem ordem globalmente finita (ver exercício 71). ◀

EXEMPLO 11.  $\delta' \notin \mathcal{D}^0$  (ver exercício 36). Para mostrar este facto seja  $\eta \in \mathcal{D}$  com  $\eta \equiv 1$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Então

$$\langle \delta', \sin(kx)\eta(x) \rangle = -k,$$

para  $k \in \mathbb{R}$ . No entanto,  $|\sin(kx)\eta(x)| \leq \|\eta\|_{L^\infty}$ . ◀





## Teoremas de Estrutura

Este capítulo é dedicado ao estudo da estrutura de espaços duais em diversos casos importantes: o dual de espaços de Hilbert, o dual de  $L^p$ ,  $C'_c$  e  $\mathcal{D}'$ .

### 1. Teorema de Riesz para espaços de Hilbert

Seja  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um produto interno em  $E$  é uma aplicação  $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , respectivamente, com as seguintes propriedades:

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;
2.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ ;
3.  $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ ;
4.  $(x, x) > 0$  se  $x \neq 0$ .

EXERCÍCIO 74. *Seja  $E$  um espaço vectorial dotado de um produto interno. Mostre que*

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

*é uma norma em  $E$ .*

Seja  $E$  espaço vectorial dotado de um produto interno. Dois vectores  $x$  e  $y$  dizem-se ortogonais se  $(x, y) = 0$ .

EXERCÍCIO 75. *Mostre que dois vectores não nulos ortogonais são linearmente independentes.*

EXERCÍCIO 76 (Teorema de Pitágoras). *Sejam  $x$  e  $y$  dois vectores ortogonais. Mostre que*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Um espaço de Hilbert  $H$  é um espaço de Banach em que a norma provém de um produto interno  $(\cdot, \cdot)$ , ou seja, para  $x \in H$

$$\|x\|^2 = (x, x).$$

EXEMPLO 12. Podemos dotar  $\mathbb{R}^d$  com o produto interno usual

$$(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

Assim, a norma em  $\mathbb{R}^n$  será

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2,$$

a norma euclidiana. ◀

EXEMPLO 13. Seja  $\mu$  uma medida de Borel em  $\mathbb{R}$ . O espaço  $L_\mu^2$  é dotado do seguinte produto interno

$$(f, g) = \int \bar{f} g d\mu.$$
◀

EXEMPLO 14. As técnicas de espaços de Hilbert podem ser utilizadas em muitos problemas de equações diferenciais parciais uma vez que os espaços de Sobolev  $W^{m,2}$  são espaços de Hilbert, dotados do produto interno

$$(u, v)_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$
◀

EXERCÍCIO 77 (Identidade de Polarização). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ . Mostre que*

$$(x, y) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2.$$

*Generalize este resultado para espaços de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ .*

EXERCÍCIO 78 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Utilizando a desigualdade*

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

*para todo o  $\lambda$ , deduza que*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwartz segue que, para  $y \in H$ , a aplicação

$$x \mapsto (y, x)$$

é um funcional linear contínuo em  $H$ . O teorema de Riesz afirma que todos os funcionais lineares contínuos em  $H$  admitem uma representação como produto interno com um vector apropriado.

LEMA 2. *Seja  $H$  um espaço de Hilbert,  $S \neq H$  um subespaço fechado. Então existe um vector não nulo ortogonal a  $S$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $y \in H \setminus S$ . Então

$$0 < \text{dist}(y, S) \equiv \inf_{x \in S} \|y - x\|.$$

EXERCÍCIO 79. *Demonstre a afirmação anterior. Mostre que pode ser falsa se  $S$  não for fechado. Dê um exemplo.*

EXERCÍCIO 80. *Mostre que os subespaços de dimensão finita são fechados.*

Vamos começar por estabelecer a existência de  $x \in S$  tal que

$$(12) \quad d(y, S) = \|y - x\|.$$

O lema é uma consequência imediata deste facto pois, para qualquer  $v \in S$  se tem

$$\|y - x\|^2 \leq \|y - x + v\|^2 = \|y - x\|^2 + 2(y - x, v) + \|v\|^2,$$

o que implica  $(y - x, v) = 0$  e, portanto, o vector  $y - x \in S^\perp$ .

Para estabelecermos a existência de tal vector, seja  $x_n$  uma sucessão de elementos de  $S$  tais que

$$\|x_n - y\| \rightarrow d(y, S).$$

Pretendemos mostrar que  $x_n$  é uma sucessão de Cauchy e, portanto, convergente para um ponto  $x$  satisfazendo (12). Temos

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|x_n - y - (x_m - y)\|^2 \\ &= 2\|x_n - y\|^2 + 2\|x_m - y\|^2 - \|x_n + x_m - 2y\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{x_n + x_m}{2} \in S$ ,

$$\|x_n + x_m - 2y\|^2 \geq 4d(y, S)^2$$

temos

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n - y\|^2 + 2\|x_m - y\|^2 - 4d(y, S)^2,$$

que converge para zero quando  $n, m \rightarrow \infty$ . ■

**TEOREMA 11** (Teorema de Representação de Riesz). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert dotado de produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e  $H'$  o seu dual. Então, para cada elemento  $u^* \in H'$ , existe  $u \in H$  tal que*

$$\langle u^*, v \rangle = (u, v) \quad \forall v \in H.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $u^* \in H'$ . Como o caso  $u^* = 0$  é trivial, podemos assumir que  $u^* \neq 0$ . Consideremos o conjunto

$$K = \{v \in H : \langle u^*, v \rangle = 0\}.$$

Como  $u^*$  é contínuo,  $K$  é um subespaço fechado que é distinto de  $H$  pois  $u^*$  não é identicamente nulo. Seja  $w \in K^\perp$  com  $\|w\| = 1$ , este vector existe pelo lema 2. Vamos escolher

$$u = \langle u^*, w \rangle w.$$

Pretendemos mostrar que

$$(u, z) = \langle u^*, z \rangle,$$

para qualquer  $z \in H$ . Se  $z \in K$  esta afirmação é trivial. Para  $z = u$ ,

$$\langle u^*, u \rangle = \langle u^*, w \rangle^2$$

e

$$(u, u) = \langle u^*, w \rangle^2.$$

Portanto, para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v \in K$ , temos

$$(u, \lambda u + v) = \langle u^*, \lambda u + v \rangle.$$

O último passo do teorema é deixado como exercício:

**EXERCÍCIO 81.** *Seja  $z \in K^\perp$ . Mostre que existe  $\lambda$  tal que*

$$z = \lambda u.$$

*Mostre que, como consequência, qualquer elemento  $z$  de  $H$  pode ser escrito na forma  $z = \lambda u + v$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v \in K$ .*

■

EXERCÍCIO 82 (Desigualdade de Bessel). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um conjunto ortonormado em  $H$ . Mostre que para cada  $x \in H$*

$$\sum_{i=1}^k (x, e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

**Sugestão:** Calcule

$$\left\| x - \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i \right\|^2.$$

EXERCÍCIO 83. *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$  um conjunto ortonormado em  $H$ . Mostre que*

$$\sum_k \lambda_k e_k$$

*converge se e somente se  $\sum_k \lambda_k^2$  é convergente.*

**1.1. Teorema de Lax-Milgram.** Em aplicações, é muitas vezes utilizado o seguinte resultado, o teorema de Lax-Milgram, que é uma consequência do teorema de Riesz.

TEOREMA 12 (Lax-Milgram). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert com norma  $\|\cdot\|$ , produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e aplicação dual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja*

$$B[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

*uma forma bilinear contínua, isto é,*

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$$

*e coerciva*

$$B[u, u] \geq \beta \|u\|^2.$$

*Seja  $f \in H'$ . Então existe  $u \in H$  tal que*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para  $u$  fixo, o funcional

$$v \mapsto B[u, v]$$

é um funcional linear contínuo. Logo, pelo teorema de Riesz, existe um elemento  $w \in H$ , que depende de  $u$  e denotamos por

$$w = Au,$$

tal que

$$B[u, v] = (Au, v).$$

Vamos mostrar que o operador  $A$  é um operador linear contínuo. Para mostrar linearidade basta observar que para todo  $v \in H$

$$\begin{aligned} (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] = \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] = \\ &= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v), \end{aligned}$$

o que implica

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A(u_1) + \lambda_2 A(u_2).$$

A continuidade segue da estimativa:

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \|Au\|,$$

e portanto

$$\|Au\| \leq \alpha \|u\|.$$

Por coercividade temos

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u, u] = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\|,$$

logo

$$(13) \quad \|Au\| \geq \beta \|u\|.$$

Consequentemente,  $A$  é injetivo.

Seguidamente vamos mostrar que a imagem de  $A$ ,  $R(A)$ , é um subespaço fechado em  $H$ . Para este efeito, consideremos uma sucessão  $v_n$  na imagem de  $H$  que converge para um vector  $v$ . Podemos escrever  $v_n = Au_n$ . Da estimativa (13) segue que  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy e portanto convergente para algum vector  $u \in H$ . Como  $A$  é contínuo  $Au = v$ .

Finalmente, vamos mostrar que a imagem  $R(A)$  de  $A$  é  $H$ . Para isso, seja  $w \in R(A)^\perp$ . Então

$$\beta \|w\|^2 \leq B[w, w] = (Aw, w) = 0$$

e, portanto,  $w = 0$ . Em conclusão, acabamos de mostrar que  $A$  tem inversa contínua.

Novamente, pelo teorema de Riesz, existe  $w$  tal que

$$\langle f, v \rangle = (w, v),$$

e, conseqüentemente, como  $A$  é invertível, existe  $u$  tal que

$$Au = w,$$

ou seja,

$$B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v \rangle,$$

para todo o  $v \in H$ . ■

EXEMPLO 15. Consideremos o problema de encontrar  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$  tal que

$$-\Delta u + \epsilon g \cdot Du + u = f,$$

em  $\mathbb{R}^d$ , para  $f \in L^2$ ,  $g \in L^\infty$  e  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Isto significa que para todo o  $v \in W^{1,2}$

$$B[u, v] = \int DuDv + \epsilon vg \cdot Du + uv = \int fv.$$

Temos  $|B[u, v]| \leq \|u\|_{W^{1,2}} \|v\|_{W^{1,2}}$ , e, se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno,  $B[u, u] \geq \frac{1}{2} \|u\|_{W^{1,2}}^2$ . Adicionalmente,

$$\left| \int fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{W^{1,2}}.$$

Assim, o teorema de Lax-Milgram garante a existência de solução  $u \in W^{1,2}$ . ◀

EXERCÍCIO 84. Seja  $(a_{ij}(x)), b_i(x), c(x)$  funções de classe  $C^\infty$  globalmente limitadas,  $a_{ij}$  uniformemente definida positiva,  $d_j$  constantes arbitrárias e  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Mostre que, para  $\lambda$  suficientemente grande, existe  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$  satisfazendo

$$-(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b_i(x)u_{x_i} + (\lambda + c(x))u = d_i g_{x_i}.$$

## 2. Teorema de Radon-Nikodym

Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas de Borel em  $\mathbb{R}^n$ . A medida  $\mu$  diz-se *absolutamente contínua* com respeito a  $\nu$  se para cada conjunto  $A$  tal que  $\nu(A) = 0$  se tem  $\mu(A) = 0$ .

TEOREMA 13 (Radon-Nikodym). *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  duas medidas finitas de Borel em  $\mathbb{R}^d$ . Se  $\nu$  é absolutamente contínua com respeito a  $\mu$  então existe uma função mensurável não negativa  $f$  tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a medida  $\lambda = \mu + \nu$ . O funcional

$$L(h) = \int h d\mu$$

é um funcional linear contínuo em  $L_\lambda^2$ . Assim, o teorema de representação de Riesz para espaços de Hilbert implica que existe  $g \in L_\lambda^2$  tal que

$$\int h d\mu = \int h g d\lambda.$$

Temos  $g \geq 0$ ,  $\lambda$  quase em toda a parte. O conjunto  $N = \{g = 0\}$  tem medida  $\mu$  nula pois

$$\mu(N) = \int_N g d\lambda = 0,$$

o que implica que  $g > 0$ ,  $\mu$  quase em toda a parte. Assim,

$$\int_{A \cap \{g > 0\}} g^{-1} d\mu = \int_{A \cap \{g > 0\}} d\lambda,$$

para cada conjunto  $A$  mensurável. Temos também  $0 \leq g \leq 1$ ,  $\lambda$  quase em toda a parte, uma vez que

$$\int_A g d\lambda = \int_A d\mu \leq \int_A d\mu + \int_A d\nu = \int_A d\lambda,$$

e, da última identidade conclui-se que

$$\nu(A) = \int_A d\lambda - \int_A d\mu = \int_A (1 - g) d\lambda.$$

Portanto,

$$\nu(A) = \int_A (1 - g) g^{-1} d\mu.$$

Consequentemente, o teorema está demonstrado para

$$f = (1 - g) g^{-1}.$$

■



### 3. Decomposição de Riesz-Markov

Um espaço  $E$  de Banach de funções reais diz-se um *reticulado* se contém as constantes e se  $f, g \in E$  então  $\min(f, g), \max(f, g) \in E$ . Um reticulado diz-se *regular* se as funções limitadas são densas e  $|f| \leq |g|$  implica  $\|f\| \leq \|g\|$ . Um funcional linear contínuo  $L$  num reticulado diz-se *positivo* se para todo o  $f \geq 0$  se tem  $L(f) \geq 0$ .

EXERCÍCIO 85. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto. Mostre que  $C(U)$  é um reticulado regular.*

EXERCÍCIO 86. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto. Identificando o conjunto  $\mathbb{R}$  com as funções constantes, mostre que  $C_c(U) \oplus \mathbb{R}$ , dotado da norma do supremo, é um reticulado regular.*

EXERCÍCIO 87. *Seja  $K \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto com medida finita. Mostre que  $L^p(K)$  é um reticulado regular.*

TEOREMA 14 (Decomposição de Riesz-Markov). *Seja  $E$  um reticulado regular e  $L$  um funcional linear contínuo em  $E$ . Então existem funcionais lineares positivos  $L^\pm$  tais que*

$$(14) \quad L = L^+ - L^-.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como o reticulado é regular é suficiente mostrar que a restrição de  $L$  ao conjunto das funções limitadas pode ser escrita na forma (14) em que  $L^\pm$  são operadores lineares limitados. Vamos definir, para  $f \geq 0$

$$L^+(f) = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} L(\varphi).$$

Claramente  $L^+ \geq 0$  e se  $\lambda \geq 0$ ,  $L^+(\lambda f) = \lambda L^+(f)$ .

LEMA 3. *Sejam  $f, g$  funções não negativas em  $E$ . Então*

$$L^+(f + g) = L^+(f) + L^+(g)$$

DEMONSTRAÇÃO. Claramente se  $0 \leq \phi \leq f$  e  $0 \leq \psi \leq g$  temos  $\phi + \psi \leq f + g$ , o que implica

$$L^+(f + g) \geq L^+(f) + L^+(g).$$

Para mostrar a desigualdade oposta seja  $0 \leq \varphi \leq f + g$  e consideremos

$$\phi = \min(\varphi, f) \quad \psi = \varphi - \phi \leq g.$$

Então

$$L(\varphi) = L(\phi) + L(\varphi) \leq L^+(f) + L^+(g),$$

o que implica

$$L^+(f + g) \leq L^+(f) + L^+(g).$$

■

Se  $f$  é uma função limitada vamos definir

$$L^+(f) = L^+(f + N) - L^+(N),$$

onde  $N$  é tal que  $f + N \geq 0$ . Como  $L^+(f + N + M) = L^+(f + N) + L^+(M)$ , a definição de  $L^+$  não depende da escolha de  $N$ . Assim, o funcional  $L^+$  fica definido para todas as funções limitadas em  $E$  e é linear neste subespaço. Por densidade, estende de forma única a  $E$ . Como

$$L(f) \leq L^+(f),$$

o funcional  $L^- = L^+ - L$  é positivo.

Falta mostrar que  $L^+$  é um funcional linear limitado. Seja  $f \in E$  e consideremos a decomposição  $f = f^+ - f^-$ . Temos

$$|L^+(f)| \leq |L^+(f^+)| + |L^+(f^-)| \leq C(\|f^+\| + \|f^-\|) \leq C\|f\|.$$

■

EXEMPLO 16. Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^d$  e  $L$  um funcional linear contínuo em  $C_c(U)$ . Identificado  $\mathbb{R}$  com as funções constantes, consideremos o espaço  $C_c(U) \oplus \mathbb{R}$  dotado da norma do supremo. Vamos construir uma extensão  $\hat{L}$  de  $L$  a  $C_c(U) \oplus \mathbb{R}$  do seguinte modo:

$$\hat{L}(\varphi + k) = L(\varphi),$$

para  $\varphi \in C_c(U)$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Temos

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 2\|\varphi + k\|_{L^\infty},$$

para qualquer  $k \in \mathbb{R}$  e  $\varphi \in C_c(U)$ . Assim,

$$|\hat{L}(\varphi + k)| \leq C\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 2C\|\varphi + k\|_{L^\infty}.$$

Pelo teorema anterior  $\hat{L}$  pode ser escrito como

$$\hat{L} = \hat{L}^+ - \hat{L}^-,$$

para funcionais positivos  $\hat{L}^\pm$ . A restrição de  $\hat{L}^\pm$  a  $C_c(U)$  produz uma decomposição de  $L$  em funcionais positivos.

EXERCÍCIO 88. Seja  $L$  um funcional linear contínuo em  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Mostre que  $L$  pode ser escrito como  $L = L^+ - L^-$  em que  $L^\pm$  são funcionais positivos em  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Note que o teorema anterior não se aplica uma vez que  $L^p(\mathbb{R}^d)$  não contém as constantes pelo que não é um reticulado, mas um argumento de aproximação elementar permite circundar este problema.

EXERCÍCIO 89. Seja  $L \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  um funcional positivo. Mostre que  $L$  tem ordem 0. **Sugestão:** como  $L$  tem suporte compacto, pode substituir  $\mathbb{R}^d$  por um compacto fixo e argumentar por contradição, assumindo que existem elementos  $\phi_n \in \mathcal{E}$  com  $\|\phi_n\|_{L^\infty} \leq 1$  tais que  $|L(\phi_n)| > n$  e utilizando-os para construir uma função não negativa  $\phi$  para a qual  $L(\phi) < 0$ .

#### 4. Dualidade em $L^p$

O objectivo desta secção é o de caracterizar o dual dos espaços  $L^p$ . No caso de  $p = 2$ , o teorema da representação de Riesz já estudado mostra que o dual de  $L^2$  pode ser identificado com  $L^2$ . O próximo exercício sugere que talvez seja possível identificar o dual de  $L^p$  com outros espaços  $L^p$ :

EXERCÍCIO 90. Seja  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  e  $g \in L^{p'}$ . Mostre que

$$f \mapsto \int fg$$

define um elemento de  $(L^p)'$ .

TEOREMA 15 (Riesz). Seja  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , e  $L \in (L^p)'$ . Então existe  $g \in L^{p'}$  tal que

$$Lf = \int fg.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $L$  um funcional linear contínuo em  $L^p$ . Pelo teorema 14 e exercício 88 podemos supor que  $L$  é positivo. Podemos utilizar o funcional  $L$  para definir uma medida  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  do seguinte modo:

$$\mu(A) \equiv \langle L, 1_A \rangle,$$

com a convenção de que  $\mu(A) = \infty$  se a medida de Lebesgue de  $A$  for infinita.

EXERCÍCIO 91. *Mostre que  $\mu$  é de facto uma medida em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, se  $\{A_i\}$  é uma família contável disjunta de conjuntos mensuráveis então*

$$\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i).$$

EXERCÍCIO 92. *Mostre que se  $f \in L^p$  então*

$$\langle L, f \rangle = \int f d\mu.$$

Claramente a medida  $\mu$  é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue e, portanto, pelo teorema de Radon-Nikodym, temos

$$\int f d\mu = \int f g dx,$$

para alguma função  $g \in L^1_{loc}$ . Assim, basta mostrar que  $g \in L^p$ , o que segue do exercício 22. ■

Seja  $1 < p < \infty$ . Uma sucessão  $f_k \in L^p$  converge fracamente para  $f$  em  $L^p$  se

$$\int f_k g \rightarrow \int f g,$$

para todo o  $g \in L^{p'}$ . Escreve-se  $f_k \rightharpoonup f$ .

EXERCÍCIO 93. *Mostre que para  $1 \leq p < \infty$  existe um conjunto contável denso em  $L^p$ .*

TEOREMA 16. *Seja  $1 < p < \infty$  e  $f_k$  uma sucessão limitada em  $L^p$ . Então, existe  $f \in L^p$  e uma subsucessão  $f_{k_j}$  tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova é deixada como exercício:

EXERCÍCIO 94. *Utilize o exercício 93 e o método da diagonal de Cantor para construir uma subsucessão tal que*

$$\int f_{k_j} g$$

*é convergente para todo o  $g \in L^{p'}$ . Mostre que este limite define um funcional linear em  $L^{p'}$ . Utilize o teorema 15 para terminar a demonstração.*



EXERCÍCIO 95. *Mostre que uma sequência de funções em  $L^1$  fracamente convergente pode não convergir fracamente para uma função em  $L^1$ , ou seja, pode acontecer que*

$$\int f_k g$$

*seja convergente para todo o  $g \in C_c$ , sem que exista  $f \in L^1$  tal que*

$$\int f_k g \rightarrow \int f g.$$

*Mostre que o limite fraco de uma sequência de funções em  $L^1$  pode ser identificado com um elemento de  $(C_c)'$ . Utilize o teorema 15 para caracterizar o limite.*

EXERCÍCIO 96. *Seja  $f_n \geq 0$  uma sucessão de funções em  $L^1$  que satisfaz*

$$\sup_n \int f_n \log(1 + f_n) < \infty.$$

*Mostre que existe  $f \in L^1$  tal que  $f_n \rightharpoonup f$  em  $L^1$ .*

## 5. Teorema de representação de Riesz

Esta secção é dedicada a um resultado central da teoria da medida, o teorema de representação de Riesz. Este caracteriza o dual de  $C_c$  como sendo o conjunto das medidas com sinal, ou seja a diferença de duas medidas positivas. A motivação para este resultado é dada no exercício seguinte:

EXERCÍCIO 97. *Sejam  $\mu^\pm$  medidas de Borel positivas e localmente finitas. Seja*

$$\langle L, \phi \rangle = \int \phi d\mu^+ - \int \phi d\mu^-.$$

*Mostre que  $L$  é um elemento de  $C'_c$ .*

TEOREMA 17. *Seja  $L \in C'_c$ . Então existem duas medidas  $\mu^\pm$  positivas e localmente finitas tais que*

$$(15) \quad \langle L, \phi \rangle = \int \phi d\mu^+ - \int \phi d\mu^-.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 14 e exemplo 16, basta considerar o caso em que  $L \geq 0$  e mostrar que existe uma medida  $\mu$  positiva e localmente finita tal que

$$\langle L, \phi \rangle = \int \phi d\mu.$$

Vamos definir esta medida do seguinte modo: para um conjunto aberto  $A$

$$\mu(A) = \sup_{\|\phi\|_{L^\infty} \leq 1, \phi \in C_c A} \langle L, \phi \rangle;$$

Para um conjunto arbitrário  $E$ , seja

$$\mu(E) = \inf_{A \text{ aberto}, E \subset A} \mu(A).$$

Iremos provar que  $\mu$  é uma medida exterior, para a qual os Borelianos são mensuráveis.

LEMA 4.  $\mu$  é uma medida exterior, isto é,

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A \subset B$  implica  $\mu(A) \leq \mu(B)$
3.  $\mu$  é contavelmente subaditiva, isto é, se  $E = \cup E_i$  então

$$\mu(E) \leq \sum \mu(E_i).$$

DEMONSTRAÇÃO. As duas primeiras afirmações do lema são evidentes, sendo a terceira a única que requer discussão. Começemos por mostrar subaditividade nos conjuntos abertos. Seja  $A$  um conjunto aberto e  $\{A_i\}$  uma família de abertos tal que  $A = \cup A_i$ . Seja  $\phi$  uma função contínua,  $\|\phi\|_{L^\infty} \leq 1$ , com suporte compacto contido em  $A$ . Seja  $A_i$ ,  $i \in I$ , uma cobertura finita do suporte de  $\phi$  e  $\{\varphi_i\}$  uma partição de unidade associada a esta cobertura. Então

$$\phi = \sum_{i \in I} \varphi_i \phi,$$

e, portanto,

$$\langle L, \phi \rangle = \sum_{i \in I} \langle L, \varphi_i \phi \rangle \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i) \leq \sum_i \mu(A_i).$$

Consequentemente, tomando o supremo em  $\phi$ ,

$$\mu(A) \leq \sum_i \mu(A_i).$$

O caso de conjuntos gerais segue facilmente da definição, como se mostra em seguida: seja  $A$  um conjunto aberto contendo  $E$  e  $A_i$  um conjunto aberto contendo  $E_i$ . Então

$$\mu(E) \leq \mu(A \cap (\cup A_i)) \leq \sum_i \mu(A_i \cap A) \leq \sum_i \mu(A_i)$$

o que implica, tomando o ínfimo em  $A_i$  tal que  $E_i \subset A_i$ , que

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

■

LEMA 5. *Para qualquer conjunto aberto  $A$  temos*

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(U) : \bar{U} \subset A, U \text{ aberto} \}$$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente observar que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup_{\phi \in C_c(A), |\phi| \leq 1} \langle L, \phi \rangle \\ &= \sup_{\bar{U} \subset A, U \text{ aberto}} \sup_{\phi \in C_c(U), |\phi| \leq 1} \langle L, \phi \rangle \\ &= \sup \{ \mu(U) : \bar{U} \subset A, U \text{ aberto} \}. \end{aligned}$$

■

Recordamos ao leitor que um conjunto  $B$  se diz *mensurável* se, para qualquer conjunto  $E$ ,

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap B^c).$$

Pela definição de  $\mu$  é suficiente mostrar a identidade anterior para conjuntos abertos  $E$ . Como os conjuntos mensuráveis formam uma  $\sigma$ -álgebra, se provarmos que os conjuntos fechados são mensuráveis mostramos que  $\mu$  quando restrita à  $\sigma$ -álgebra de Borel é uma medida.

LEMA 6. *Os conjuntos fechados são mensuráveis e portanto  $\mu$  quando restrita à  $\sigma$  álgebra de Borel é uma medida.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $F$  um conjunto fechado e  $A$  um conjunto aberto. Pela subaditividade é suficiente mostrar que

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^c).$$

Pelo lema anterior existe um aberto  $U$  tal que  $\bar{U} \subset A \cap F^c$  e

$$\mu(U) > \mu(A \cap F^c) - \epsilon.$$

Seja  $V = A \cap \bar{U}^c$ . Temos  $A \cap F \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ , portanto

$$\mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^c) < \mu(U) + \epsilon + \mu(V) < \mu(A) + \epsilon,$$

fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos a desigualdade pretendida.  $\blacksquare$

Finalmente queremos mostrar que

$$\langle L, \phi \rangle = \int \phi d\mu.$$

Podemos, sem perda de generalidade assumir  $\phi \geq 0$ . Para o efeito seja  $n$  fixo e consideremos os seguintes conjuntos

$$A_k = \{x : n\phi > k - 1\}.$$

Seja

$$\phi_k = \begin{cases} 1 & \text{em } A_{k+1} \\ n\phi(x) - k + 1 & \text{em } A_k \setminus A_{k+1} \\ 0 & \text{em } A_k^c. \end{cases}$$

Claramente  $\phi_k$  é contínua e

$$\frac{1}{n} \sum_k \phi_k = \phi.$$

Por outro lado

$$\frac{1}{n} \sum_k \mu(A_{k+1}) \leq \langle L, \phi \rangle \leq \frac{1}{n} \sum_k \mu(A_k),$$

e quando  $n \rightarrow \infty$  ambos os termos extremos da desigualdade tendem para  $\int \phi d\mu$ .  $\blacksquare$

EXEMPLO 17. Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto com interior não vazio. O conjunto  $BV(U)$  das funções de variação limitada em  $U$  é constituído pelas funções  $f \in L^1(U)$  tais que a sua derivada no sentido das distribuições é um funcional linear contínuo em  $C_c(U)$ , ou seja

$$\left| \int f \operatorname{div} \varphi \right| \leq C \|\varphi\|_{L^\infty(U)},$$

para todo o  $\varphi \in C_c(U; \mathbb{R}^d)$ . Pelo teorema da representação de Riesz, existem medidas  $\mu_i$ ,  $i = 1 \dots d$  tais que

$$\int f \operatorname{div} \varphi = \int \varphi_i d\mu_i.$$





EXERCÍCIO 98. Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  diz-se de perímetro finito se  $1_E$ , a função característica de  $E$ , for uma função de variação limitada em  $\mathbb{R}^d$ . Suponha que a fronteira de  $E$  é uma variedade  $d - 1$  dimensional. Determine a medida que representa a derivada de  $1_E$ . Mostre que

$$\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1, \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)} \int_E \operatorname{div} \varphi$$

é a área  $d - 1$  dimensional da fronteira de  $E$ .

EXERCÍCIO 99. Mostre que

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1} + \sup_{\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1} \int f \operatorname{div} \varphi$$

define uma norma para as funções  $BV$ .

## 6. Teorema de Hahn-Banach

Antes de provarmos o teorema de estrutura de distribuições necessitamos de um resultado preliminar, o teorema de Hahn-Banach. Este garante que qualquer funcional linear definido num subespaço de um espaço vectorial normado pode ser estendido, sem aumentar a norma, a todo o espaço.

TEOREMA 18 (Hahn-Banach). Seja  $E$  um subespaço de um espaço vectorial normado  $F$ . Seja  $L$  um funcional linear contínuo em  $E$ . Então existe um funcional  $\hat{L}$  que estende  $L$  a  $F$  e tal que

$$\|L\| = \|\hat{L}\|.$$

DEMONSTRAÇÃO. A ideia central deste teorema consiste em mostrar que, dado um funcional linear contínuo definido num subespaço, é sempre possível estendê-lo a um subespaço maior sem aumento de norma. Isto é feito no seguinte lema:

LEMA 7. Seja  $E$  um subespaço de um espaço vectorial normado  $F$  e seja  $L$  um funcional linear contínuo definido em  $E$ . Seja  $x_0 \in F$  tal que  $x_0 \notin E$ . Então  $L$  pode ser estendido sem aumento de norma a  $E \oplus \mathbb{R}x_0$ .

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda de generalidade podemos assumir  $\|L\| = 1$ . Em primeiro lugar vamos considerar o caso do corpo dos escalares ser  $\mathbb{R}$ .

Uma vez que qualquer vector em  $E \oplus x_0$  pode ser escrito de uma única forma como  $x + \alpha x_0$ , com  $x \in E$ , para definir a extensão de  $L$  a  $E \oplus x_0$  é suficiente especificar  $L(x_0) \equiv \beta_0$ . Queremos mostrar que isto pode ser feito sem aumento de norma, ou seja que

$$|L(x) + \alpha\beta_0| \leq \|x + \alpha x_0\|,$$

ou, de modo equivalente,

$$|L(\frac{x}{\alpha}) + \beta_0| \leq \|\frac{x}{\alpha} + x_0\|.$$

Queremos assim, mostrar que existe um valor  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  para o qual

$$|L(x) + \beta_0| \leq \|x + x_0\|,$$

para todo o  $x \in E$ . Sejam  $x, y \in E$ ,

$$L(x) - L(y) \leq \|x - y\| \leq \|x + x_0\| + \|y + x_0\|.$$

Portanto

$$L(x) - \|x + x_0\| \leq L(y) + \|y + x_0\|.$$

Vamos escolher então  $\beta_0$

$$\sup_x L(x) - \|x + x_0\| \leq -\beta_0 \leq \inf_x L(x) + \|x + x_0\|,$$

pois assim

$$L(x) + \beta_0 \leq \|x + x_0\| \quad L(x) + \beta_0 \geq -\|x + x_0\|.$$

No caso de o corpo de escalares ser  $\mathbb{C}$  procedemos do seguinte modo. Podemos considerar  $F$  como um espaço vectorial real e escrever

$$L(x) = R(x) + iI(x),$$

em que  $R$  e  $I$  são, respectivamente, a parte real e imaginária de  $L$ . Claramente  $R$  e  $I$  são funcionais lineares reais. Por outro lado, como

$$L(ix) = iL(x),$$

temos

$$R(ix) + iI(ix) = iR(x) - I(x),$$

ou seja  $I(ix) = R(x)$ . Como  $i^2 = -1$ ,  $I(x) = -I(i^2x) = -R(ix)$ . Logo

$$L(x) = R(x) + iI(x) = R(x) - iR(ix).$$

Pela parte anterior da prova, o funcional  $R$  pode ser estendido para um funcional  $\hat{R}$ , sem aumento de norma, definido no espaço vectorial real  $E \oplus x_0$ . Vamos definir a extensão de  $L$  ao espaço vectorial complexo  $E \oplus x_0$  através de

$$\hat{L}(x) = \hat{R}(x) - i\hat{R}(ix).$$

EXERCÍCIO 100. *Mostre que  $\hat{L}$  é um funcional linear sobre o corpo de escalares  $\mathbb{C}$ .*

Finalmente queremos mostrar que  $\|\hat{L}\| = 1$ . Para o efeito, seja  $x$  um vector arbitrário e seja  $\lambda \in \mathbb{C}$ , com  $|\lambda| = 1$  tal que  $\lambda\hat{L}(x) \in \mathbb{R}$ . Então

$$|\hat{L}(x)| = |\hat{L}(\lambda x)| = |\hat{R}(\lambda x)| \leq \|x\|.$$

■

Uma vez estabelecido este facto o resultado é obtido utilizando o lema de Zorn. De facto, o conjunto de todas as extensões de  $L$  é um conjunto parcialmente ordenado com respeito à seguinte ordem parcial:  $L_1 \leq L_2$  se  $\text{dom } L_1 \subset \text{dom } L_2$  e  $L_1(x) = L_2(x)$  para  $x \in \text{dom } L_1$ . Obviamente qualquer cadeia de extensões tem um majorante e, portanto, pelo lema de Zorn, existe uma extensão maximal. O lema anterior implica que domínio desta extensão tem que ser  $F$ . ■

EXERCÍCIO 101. *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço fechado de  $E$ . Mostre se  $F \neq E$  existe um funcional linear contínuo  $\gamma$  não nulo tal que  $\gamma(F) = 0$ .*

EXERCÍCIO 102. *Seja  $E$  um espaço de Banach tal que  $E'$  é reflexivo (ver exercício 10 e comentário imediatamente a seguir). Mostre que  $E$  também é reflexivo. Sugestão: mostre que se  $E$  não for reflexivo, existe um funcional não nulo  $\gamma \in E'''$  satisfazendo,  $\gamma(E) = 0$ . Mas então, identificando  $\gamma$  com o elemento correspondente de  $E'$ , temos  $\gamma(E) = 0$ , o que implica  $\gamma \equiv 0$ .*

EXERCÍCIO 103. *O objectivo deste exercício é o de apresentar uma prova do teorema de Riesz para  $L^p$  baseada no teorema de Riesz para espaços de Hilbert. Seja  $K \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto com medida finita. Utilizando o teorema anterior,*

1. *Mostre que  $(L^2(K))' = L^2(K)$ .*

2. Mostre que  $(L^p(K))' = L^q(K)$ , com  $1 < p < 2$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
Sugestão: Considere a restrição dos elementos de  $(L^p(K))'$  a  $L^2(K)$ . Mostre que qualquer elemento de  $(L^p(K))'$  pode ser identificado com uma função  $L^2(K)$ ; seguidamente utilize o exercício 22 para mostrar que esta função é um elemento de  $L^q$ .
3. Mostre que  $L^p(K)$  é reflexivo para  $p > 2$  utilizando os exercícios 9 e 10.
4. Utilize o exercício 102 para mostrar que  $L^p$  para  $p < 2$  é reflexivo, isto é,  $(L^p)'' = L^p$ .
5. Mostre que  $(L^p(K))' = L^q(K)$ , com  $2 < p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Estenda os resultados anteriores para o caso em que  $K$  não tem medida finita.

## 7. Estrutura local de distribuições

TEOREMA 19. Seja  $L$  um elemento de  $\mathcal{D}'$ ,  $K$  um compacto fixo e  $N$ , tal como na proposição 4, a ordem de  $L$  quando restrito a funções com suporte em  $K$ . Então existem medidas localmente finitas  $(\mu_\alpha)$ , indexadas com o multiíndice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq N$  e, tais que para  $\phi \in \mathcal{D}$  com

$$\text{supp } \phi \subset K,$$

se tem

$$L(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int D^\alpha \phi d\mu_\alpha.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos considerar o espaço vectorial

$$X = \prod_{|\alpha| \leq N} C_c$$

dotado da norma

$$\|(f_\alpha)\|_X = \sum_{|\alpha| \leq N} \|f_\alpha\|_{L^\infty}.$$

Seja  $Y$  o subespaço de  $X$  composto pelos elementos da forma  $y = (D^\alpha \phi)_{|\alpha| \leq N}$  com  $\phi \in \mathcal{D}$  e  $\text{supp } \phi \subset K$ .

Em  $Y$  defina-se o funcional  $\tilde{L}$  por

$$\tilde{L}(y) = L(\phi),$$

se  $y = (D^\alpha \phi)_{|\alpha| \leq N}$ . Este funcional satisfaz

$$|\tilde{L}(y)| \leq C\|y\|,$$

e portanto, pelo teorema de Hahn-Banach (teorema 18), pode ser estendido para um funcional  $\hat{L}$  definido em todo o espaço  $X$ .

Nos elementos de  $X$  da forma  $\tau_\alpha \psi = (0, \dots, \psi, \dots, 0)$ , onde  $\psi$  aparece na coordenada  $\alpha$  e  $\text{supp } \psi \subset K$ , temos

$$\hat{L}(\tau_\alpha \psi) = \int \psi d\mu_\alpha,$$

pois o funcional

$$\psi \mapsto \hat{L}(\tau_\alpha \psi)$$

é um elemento de  $C'_c$ .

A linearidade implica o resultado pretendido. ■

**EXERCÍCIO 104.** *Mostre que a decomposição do teorema 19 não é única pois existem medidas  $\mu_\alpha$ , não nulas, tais que*

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int D^\alpha \phi d\mu_\alpha = 0,$$

para todo o  $\phi \in \mathcal{D}$ .

## 8. Estrutura global de distribuições e aproximação

O teorema de estrutura local permite caracterizar globalmente qualquer elemento de  $\mathcal{D}'$  utilizando o seguinte artifício: seja  $\{\eta_j\}$  uma colecção de funções  $C^\infty$  com suporte compacto tais que

$$\sum_j \eta_j \equiv 1$$

em  $\mathbb{R}^d$  e tais que em cada ponto apenas um número finito de  $\eta_j$  é que são diferentes de 0. Seja  $L \in \mathcal{D}'$ . Então

$$L = \sum_j L_j$$

onde  $\langle L_j, \phi \rangle = \langle L, \eta_j \phi \rangle$ . Assim, qualquer elemento de  $\mathcal{D}'$  pode ser escrito como uma soma de distribuições com suporte compacto aos quais o teorema de estrutura local pode ser aplicado.

**EXERCÍCIO 105.** *Mostre, utilizando o teorema de estrutura de distribuições e os comentários anteriores que qualquer elemento de  $\mathcal{D}'^N$  pode ser estendido para  $C_c^N$ .*

**EXERCÍCIO 106.** *Seja  $L$  uma distribuição com suporte compacto. Seja  $\rho_n$  uma sucessão regularizante. Mostre que a sequência  $L_n$  dada por*

$$\langle L_n, \phi \rangle = \langle L, \rho_n * \phi \rangle$$

*converge em  $\mathcal{D}'$  para  $L$ . Mostre, utilizando o teorema de estrutura de distribuições que cada  $L_n$  pode ser identificado como um elemento de  $\mathcal{D}$ .*

**EXERCÍCIO 107.** *Mostre que se  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  satisfaz  $Dv = 0$  então  $v$  é constante.*

**Sugestão.** *Observe que qualquer  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  pode ser escrito como*

$$\phi = c\eta(x) + D\psi,$$

*onde  $\eta \in \mathcal{D}$  é fixa, com  $\int \eta \neq 0$  e  $\psi \in \mathcal{D}$*

**EXERCÍCIO 108.** *Seja  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Determine  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tal que  $Du = v$ .*

**Sugestão.** *Use que se  $\phi = D\psi$  então  $\langle u, \phi \rangle$  é definido por*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, D\psi \rangle = -\langle v, \psi \rangle.$$

*Escreva  $\phi \in \mathcal{D}$  como*

$$\phi = c\eta + D\psi.$$

## 9. Distribuições com suporte num ponto e divisão

O teorema de estrutura de distribuições estudado anteriormente é demasiado geral para caracterizar com precisão certas distribuições especiais. Nesta secção estudamos com mais detalhe a estrutura de distribuições com suporte num ponto e aplicamos os resultados ao estudo da divisão de distribuições por funções.

PROPOSIÇÃO 5. *Seja  $L \in \mathcal{D}'^N(\mathbb{R}^d)$  com suporte em  $\{0\}$ . Então*

$$\langle L, \phi \rangle = 0$$

*se  $D^\alpha \phi(0) = 0$  para todo o multiíndice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq N$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\psi \in \mathcal{D}$  com  $\psi \equiv 1$  em  $B_{1/2}(0)$  e  $\psi \equiv 0$  no complementar de  $B_1(0)$ . Temos

$$\langle L, \phi \rangle = \langle L, \phi(x) \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \rangle.$$

Aplicando as estimativas de seminormas ao termo da direita temos

$$\begin{aligned} |\langle L, \phi \rangle| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \left[ \phi(x) \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]\|_{L^\infty} \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \left[ \phi(x) \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))}, \end{aligned}$$

devido ao suporte de  $\psi$ . Como em  $B_\epsilon(0)$  se tem  $D^\beta \phi = O(\epsilon^{N+1-|\beta|})$ , obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} |\langle L, \phi \rangle| &\leq C \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \|D^\beta \phi(x) D^\alpha \left( \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right)\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))} \\ &\leq C \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} C \epsilon^{N+1-|\beta|-|\alpha|} = O(\epsilon). \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$|\langle L, \phi \rangle| = 0.$$

■

TEOREMA 20. *Seja  $L \in \mathcal{D}'^N(\mathbb{R}^d)$  com suporte em  $\{0\}$ . Então*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam  $\phi$  e  $\psi$  duas funções cujas  $N$  primeiras derivadas coincidem em  $x = 0$ . Pela proposição 5,  $L(\phi - \psi) = 0$ , ou seja,

$$(16) \quad L\phi = L\psi.$$

Sejam  $\eta \in \mathcal{D}$ , idênticamente 1 numa vizinhança de  $x = 0$ , e  $p_\phi$  o polinómio de Taylor até à ordem  $N$  de  $\phi$ . De (16) obtemos

$$L\phi = L(\eta p_\phi).$$

Mas então

$$L(\eta p_\phi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} L(\eta x^\alpha) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \langle D^\alpha \delta, \phi \rangle,$$

com

$$c_\alpha = \frac{L(\eta x^\alpha)}{\alpha!}.$$

EXERCÍCIO 109. *Mostre que  $c_\alpha$  não depende da escolha de  $\eta$ , desde que cumpra as condições da demonstração.*

■

Seja  $f \in \mathcal{E}$ , sem zeros e  $v \in \mathcal{D}'$ . A única solução  $u \in \mathcal{D}'$  de

$$fu = v,$$

é

$$u = \frac{v}{f}.$$

No entanto, se  $f$  tiver zeros tal não é necessariamente verdade.

EXEMPLO 18. Seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Então, a solução geral de

$$xu = 0$$

é  $u = c\delta$  para  $c \in \mathbb{R}$ . Com efeito, consideremos  $\psi \in \mathcal{D}$  arbitrária. Seja  $\eta \in \mathcal{D}$  idênticamente 1 numa vizinhança de  $x = 0$ . Podemos escrever

$$\psi = \psi(0)\eta(x) + x\phi(x)$$

com  $\phi(x) \in \mathcal{D}$ . Portanto

$$\langle u, \psi \rangle = \psi(0)\langle u, \eta \rangle + \langle xu, \phi \rangle = c\langle \delta, \psi \rangle,$$

para  $c = \langle u, \eta \rangle$ , pois  $\langle xu, \phi \rangle = 0$ .

◀

## 10. Aplicações a equações diferenciais

EXEMPLO 19. Consideremos, em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , a equação diferencial

$$Du + \lambda u = 0.$$

Multiplicando a equação por  $e^{\lambda x}$  temos

$$D(e^{\lambda x}u) = 0,$$



ou seja,  $e^{\lambda x}u = C$  e, portanto,

$$u = Ce^{-\lambda x}.$$



EXERCÍCIO 110. Considere  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  com um zero simples em  $x = 0$  e diferente de zero em  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Seja  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  uma solução de

$$\phi u = 0.$$

Mostre que

$$u = c\delta.$$

EXERCÍCIO 111. Mostre que a solução geral de

$$x^m u = 0$$

em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  é

$$u = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \delta^{(i)}.$$

EXEMPLO 20. Consideremos em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  a equação diferencial

$$u + xDu = 0.$$

Podemos reescrever a equação como

$$D(xu) = 0,$$

e, portanto,

$$xu = C_2,$$

ou seja,

$$u = \text{pv} \frac{C_1}{x} + v,$$

onde  $v$  é a solução de  $xv = 0$ , que pelo exercício anterior é

$$v = C_2\delta.$$



EXERCÍCIO 112. Seja  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  uma distribuição com suporte em  $x = 0$ ,  $\phi$  uma função diferente de zero em  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  e satisfazendo  $D^\alpha \phi(0) = 0$  para  $|\alpha| \leq N$  e

$$\phi u = 0.$$

Mostre que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

EXERCÍCIO 113. Calcule todas as soluções  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de

$$x^m u = \sin x.$$

EXERCÍCIO 114. Calcule todas as soluções  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de

$$(\sin x)u = \cos x.$$

EXERCÍCIO 115. Em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , resolva a equação diferencial

$$u_{xx} + \lambda u = 0.$$

EXERCÍCIO 116. Para  $\lambda \geq 0$ , resolva a equação diferencial

$$xDu - \lambda u = 0,$$

com  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

EXERCÍCIO 117. Determine em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  todas as soluções da equação diferencial

$$xu_x + 2u = 0.$$

## 11. Produto tensorial

O produto tensorial  $L_x \otimes J_y$  de duas distribuições  $L_x$  e  $J_y$  resp. em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  é um elemento de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  definido por

$$\langle L_x \otimes J_y, \phi(x, y) \rangle \equiv \langle L_x, \langle J_y, \phi(x, y) \rangle \rangle.$$

Uma aplicação simples do teorema de Fubinni e do teorema de estrutura mostra que

$$\langle L_x, \langle J_y, \phi(x, y) \rangle \rangle = \langle J_y, \langle L_x, \phi(x, y) \rangle \rangle.$$

EXERCÍCIO 118. Determine o produto tensorial de  $\delta_x \otimes \delta_y$ .

EXERCÍCIO 119. Sejam  $L$  e  $J$  duas distribuições com suporte  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$ , respectivamente. Mostre que o suporte de  $L \otimes J$  é  $A \times B$ .

EXERCÍCIO 120. Mostre que se pode definir de forma análogo produto tensorial de dois elementos de  $\mathcal{E}'$  e que é elemento de  $\mathcal{E}'$ .

## 12. Convolução e soluções fundamentais

Sejam  $f, g \in L^1$ . A convolução de  $f$  com  $g$  é

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy.$$

Podemos encarar  $f * g$  como uma distribuição em  $\mathcal{D}'$  definida por

$$\phi \mapsto \int f(x - y)g(y)\phi(x)dydx = \int f(z)g(y)\phi(z + y)dzdy.$$

Isto sugere definir a convolução de duas distribuições  $L$  e  $J$  através de

$$(17) \quad \langle L * J, \phi \rangle = \langle L_x \otimes J_y, \phi(x + y) \rangle.$$

No entanto, uma vez que a função  $\phi(x + y) \notin \mathcal{D}$  a convolução de duas distribuições pode não estar bem definida. Por exemplo  $1 * 1$  não está bem definido por (17). Assim, é necessário investigar condições sobre as quais a distribuição  $L_x \otimes J_y \in \mathcal{D}'$  pode ser estendida ao conjunto das funções da forma  $\phi(x + y)$ , com  $\phi \in \mathcal{D}$ .

Se  $\phi \in \mathcal{D}$  a função  $\phi(x + y)$  tem suporte numa vizinhança da diagonal  $x + y = 0$ . Esta observação motiva a seguinte definição: duas distribuições  $L, J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  têm *suportes bem associados* se, para cada  $R > 0$ , o conjunto

$$\{|x + y| \leq R\} \cap \text{supp } L \otimes J$$

é compacto.

**TEOREMA 21.** *Se  $L, J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  têm suportes bem associados então  $L * J \in \mathcal{D}'$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** O teorema de estrutura de distribuições e a hipótese de que os suportes de  $L$  e  $J$  são bem associados mostra que

$$\langle L_x \otimes J_y, \phi(x + y) \rangle$$

é dado por um integral num conjunto compacto e, portanto, convergente. Portanto, a convolução  $L * J$ , que é claramente linear, está bem definida para  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ .

Falta mostrar continuidade. Seja  $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  uma sucessão convergente para zero em  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Suponhamos que  $\text{supp } \phi_n \subset K$ , para algum

compacto  $K$  fixo. Seja

$$\tilde{K} = \{(x, y) : x + y \in K\} \cap \text{supp } L \otimes J,$$

que é compacto. Vamos escolher  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$  tal que  $\psi \equiv 1$  em  $\tilde{K}$ . Então temos

$$\langle L \otimes J, \phi_n(x+y) \rangle = \langle L \otimes J, \psi(x, y) \phi_n(x+y) \rangle = \langle \psi(x, y) L \otimes J, \phi_n(x+y) \rangle.$$

Como a distribuição  $\psi(x, y) L \otimes J$  tem suporte compacto, é suficiente mostrar que  $\phi_n(x+y) \rightarrow 0$  em  $\mathcal{E}$ , o que é evidente. ■

É importante observar que a condição de suporte bem associado não é necessária para que a convolução esteja bem definida.

EXERCÍCIO 121. *Seja  $u = e^{-\pi x^2}$  encarada como um elemento de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Mostre que  $u$  não tem o suporte bem associado consigo próprio. Calcule  $u * u$ .*

PROPOSIÇÃO 6. *Se  $L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  então  $L * \delta = L$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\phi \in \mathcal{D}$ . Então

$$\begin{aligned} \langle L * \delta, \phi \rangle &= \langle L_x \otimes \delta_y, \phi(x+y) \rangle = \\ &= \langle L_x, \langle \delta_y, \phi(x+y) \rangle \rangle = \langle L_x, \phi(x) \rangle. \end{aligned}$$

■

EXERCÍCIO 122. *Mostre que se  $L, J \in \mathcal{D}'$  e pelo menos um deles tem suporte compacto, então os suportes de  $L$  e  $J$  estão bem associados.*

EXERCÍCIO 123. *Seja  $L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Calcule  $L * \delta'$ .*

Seja  $T : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$  um operador linear contínuo invariante por translação, isto é,

$$T(\tau_y \phi) = \tau_y(T\phi).$$

Seja  $f \in \mathcal{E}'$ . Queremos estudar as soluções  $u \in \mathcal{D}'$  da equação

$$(18) \quad T^t u = f.$$

Uma distribuição  $G \in \mathcal{D}'$  diz-se uma *solução fundamental* de (18) se

$$T^t G = \delta.$$

TEOREMA 22. *Seja  $G \in \mathcal{D}$  uma solução fundamental de (18). Então*

$$u = f * G$$

*é uma solução de (18).*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\begin{aligned} \langle T^t u, \phi \rangle &= \langle u, T\phi \rangle = \langle f * G, T\phi \rangle = \\ &= \langle f \otimes G, (T\phi)(x + y) \rangle = \langle f_x, \langle G_y, (T\phi)(x + y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f_x, \langle T^t G_y, \phi(x + y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f_x, \langle \delta_y, \phi(x + y) \rangle \rangle = \langle f, \phi \rangle. \end{aligned}$$

■

EXERCÍCIO 124. *Determine uma solução fundamental em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de*

- (1)  $T^t u = u_x$ ;
- (2)  $T^t u = u_{xx}$ .

EXERCÍCIO 125. *Seja  $L \in \mathcal{E}'$  e  $J_n$  uma sucessão em  $\mathcal{D}'$  convergente para  $J \in \mathcal{D}'$ . Mostre que*

$$L * J_n \rightarrow L * J$$

*em  $\mathcal{D}'$ .*

EXERCÍCIO 126. *Seja  $L \in \mathcal{D}'$ . Mostre que  $\phi \mapsto L * \phi$  é um operador linear contínuo de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{E}$  que comuta com as translações.*

EXERCÍCIO 127. *Seja  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  um operador linear contínuo que comuta com translações, ou seja,*

$$T(\tau_y(\varphi)) = \tau_y(T(\varphi)).$$

*Mostre que*

$$\varphi \mapsto \langle L, \varphi \rangle = T(\varphi)(0)$$

*é um elemento de  $\mathcal{D}'$  e que*

$$T(\varphi)(y) = \langle L, \tau_y \varphi \rangle.$$

*Prove que existe uma distribuição  $J$  tal que*

$$T(\varphi) = J * \varphi.$$

EXERCÍCIO 128. Seja  $T = \partial_x^2 - \partial_t^2$ . Mostre que

$$G(x, t) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x > |t| \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma solução fundamental de  $T$ . Mostre também que se  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  e  $\text{supp } f \subset \{x \geq 0\}$  então existe uma solução de  $Tu = f$  com  $\text{supp } u \subset \{x \geq 0\}$ .

### 12.1. Núcleo de Schwartz.

EXERCÍCIO 129. Seja  $k(x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ . Mostre que

$$\phi(x) \mapsto \langle k(x, y), \phi(x) \rangle$$

define uma aplicação sequencialmente contínua de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .

O exercício anterior é o recíproco do teorema de Schwartz. Este afirma que qualquer aplicação  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  sequencialmente contínua, pode ser representada por uma distribuição  $k(x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , o *núcleo de Schwartz*, tal que

$$T\phi = \langle k(x, y), \phi(x) \rangle,$$

ou seja

$$\langle T\phi, \psi(y) \rangle = \langle k(x, y), \phi(x)\psi(y) \rangle.$$

A partir das propriedades do núcleo podem ser deduzidas propriedades importantes da transformação  $T$ .

EXERCÍCIO 130. Se  $k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$  então  $T$  estende-se a uma transformação linear sequencialmente contínua

$$T : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m).$$

Consideremos a equação linear

$$Au = f.$$

Um operador fundamental  $T$  desta equação é um operador que satisfaz

$$TAu = u,$$

o núcleo fundamental da equação é o núcleo de Schwartz associado a  $T$ .

EXERCÍCIO 131. *Determine o núcleo fundamental da equação de Laplace em dimensão 2.*

### 13. Álgebras de convolução

Um espaço vectorial  $\mathcal{A}$  munido de uma operação

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$$

diz-se uma *álgebra comutativa* se a operação  $*$  satisfizer as seguintes propriedades:

- (1)  $a * (b + c) = a * b + a * c$
- (2)  $a * (b * c) = (a * b) * c$
- (3)  $a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$
- (4)  $a * b = b * a$ ,

para  $a, b, c \in \mathcal{A}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Um elemento  $e \in \mathcal{A}$  diz-se uma *identidade* se  $e * a = a$  para todo o  $a \in \mathcal{A}$ . Um elemento  $a \in \mathcal{A}$  diz-se *invertível* se existir  $b \in \mathcal{A}$  tal que

$$a * b = e.$$

EXERCÍCIO 132. *Mostre que*

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}) \equiv \{u \in \mathcal{D}' : \text{supp } u \subset [0, +\infty)\},$$

*quando dotado da operação convolução é uma álgebra comutativa. Mostre que  $\delta$  é a identidade.*

EXERCÍCIO 133. *Mostre que  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  quando dotado da operação convolução é uma álgebra comutativa. Mostre que  $\delta$  é a identidade.*

Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra comutativa com elemento unidade  $e$ . Um polinómio em  $a \in \mathcal{A}$  é um elemento da forma

$$P(a) = \sum_{i=0}^n c_i a^i,$$

com  $a^0 = e$ .

EXERCÍCIO 134. Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{D}'_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ . Mostre que

$$c_1\delta' + c_0\delta$$

é invertível. Mostre que

$$(c_1\delta' + c_0\delta)^n$$

é invertível. Mostre que qualquer polinómio  $P(\delta')$  é invertível.

EXERCÍCIO 135. Utilize o exercício anterior para mostrar que qualquer equação diferencial ordinária de coeficientes constantes:

$$\sum_{i=0}^n c_i D^i \phi(x) = f$$

tem solução (excepto em casos triviais) em  $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$  com  $f \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ .

EXERCÍCIO 136. Calcule todas as soluções em  $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$  de

1.

$$u'' - 3u' + 2u = \delta_0 + \delta_1$$

2.

$$u'' - 2u' + u = \delta_0$$



## Transformada de Fourier

Este capítulo é dedicado ao estudo da transformada de Fourier

$$(19) \quad \phi \mapsto \hat{\phi}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} \phi(x) dx$$

e de algumas das suas aplicações elementares. A aplicação (19) está bem definida para funções  $\phi$  em  $L^1$ , sendo que  $\hat{\phi} \in L^\infty$ . Em geral,  $\hat{\phi} \notin L^1$ , e, infelizmente, a fórmula de inversão da transformada de Fourier, que demonstraremos mais tarde,

$$\phi(x) = \int e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{\phi}(\xi) d\xi,$$

não está definida para funções  $\hat{\phi}$  em  $L^\infty$ . Vamos portanto estudar espaços de funções fechados para a transformada de Fourier de modo a que se possa definir a inversa sem problemas. Pelas aplicações a equações diferenciais há também interesse em que estes espaços sejam fechados para multiplicação por polinómios e diferenciação.

**EXERCÍCIO 137.** *Seja  $\phi \in L^1$ . Mostre que a sua transformada de Fourier  $\hat{\phi}(\xi)$  é contínua.*

### 1. Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

O *espaço de Schwartz*  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  é o espaço das funções  $\phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tais que  $x^\alpha D^\beta \phi$  é globalmente limitado para quaisquer multiíndices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ . Este espaço é dotado da noção de convergência associada à família de seminormas

$$\|x^\alpha D^\beta u\|_{L^\infty},$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ . Os elementos do espaço  $\mathcal{S}'$ , dual de  $\mathcal{S}$ , são chamadas distribuições temperadas e temos as seguintes inclusões  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ .

EXERCÍCIO 138. *Mostre que os operadores multiplicação por  $x^\alpha$ ,  $D^\beta$  e translação  $\tau_h$ ,  $h \in \mathbb{R}^d$ , são lineares contínuos de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$ . Por transposição definem as mesmas operações em  $\mathcal{S}'$ .*

EXERCÍCIO 139. *Seja  $f \in L^1_{loc}$  tal que, para algum  $k \geq 0$*

$$\frac{f}{(1 + |x|^2)^{k/2}} \in L^1.$$

*Mostre que  $f \in \mathcal{S}'$ .*

Muitas vezes é conveniente utilizar outros sistemas de seminormas que são equivalentes:

PROPOSIÇÃO 7. *A seguinte família de seminormas*

$$C_{k,\beta}(f) = \|(1 + |x|^2)^k D^\beta u\|_{L^\infty}$$

*gera a noção de convergência em  $\mathcal{S}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Claramente, dada uma seminorma  $\|x^\alpha D^\beta u\|_{L^\infty}$  existe  $k$  suficientemente grande tal que

$$\|x^\alpha D^\beta u\|_{L^\infty} \leq C \|(1 + |x|^2)^k D^\beta u\|_{L^\infty}.$$

Por outro lado, cada uma das seminormas  $\|(1 + |x|^2)^k D^\beta u\|_{L^\infty}$  é controlada por uma soma finita

$$\|(1 + |x|^2)^k D^\beta u\|_{L^\infty} \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2k} \|x^\alpha D^\beta u\|_{L^\infty}.$$

■

Como consequência deste resultado, qualquer função  $f \in \mathcal{S}$  satisfaz

$$|D^\beta f(x)| \leq \frac{C_{k,\beta}(f)}{(1 + |x|^2)^k},$$

para quaisquer  $\beta$  e  $k$ . Esta estimativa é por vezes útil para controlar expressões integrais. Adicionalmente  $C_{k,\beta}(f) \rightarrow 0$  se  $f \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}$ .

EXERCÍCIO 140. *Mostre que  $\mathcal{S} \subset L^p$  para  $1 \leq p \leq \infty$ .*

EXERCÍCIO 141. *Mostre que  $f \in L^p$  com  $1 \leq p \leq \infty$  pode ser encarada como um elemento de  $\mathcal{S}'$ .*

EXERCÍCIO 142. Seja  $L \in \mathcal{S}'$ . Mostre que existem inteiros  $k$  e  $N$  e uma constante  $C$  tais que

$$|L(f)| \leq C \sum_{|\beta| \leq N} C_{k,\beta}(f),$$

para todo o  $f \in \mathcal{S}$ .

EXERCÍCIO 143. Seja  $L \in \mathcal{S}'$  um funcional positivo. Mostre que existe um índice  $k$  e uma constante tal que

$$|L(f)| \leq C_{k,0}(f).$$

**Sugestão:** adapte a prova do exercício (89).

TEOREMA 23. A transformada de Fourier em  $\mathcal{S}$  tem as seguintes propriedades:

1.  $\int \hat{\phi}\psi = \int \phi\hat{\psi}$  - identidade de Parseval
2.  $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$
3.  $(Df)^\wedge = 2\pi i\xi \hat{f}$
4.  $(-2\pi ixf)^\wedge = D_\xi \hat{f}$
5.  $(\tau_h f)^\wedge = e^{-2\pi i\xi h} \hat{f}$
6.  $(f(\lambda x))^\wedge = \lambda^{-d} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$ .

DEMONSTRAÇÃO. Todas estas provas consistem em manipulações elementares de integrais pelo que as deixaremos como exercício ao cuidado do leitor.

EXERCÍCIO 144. Demonstre o teorema.

■

EXERCÍCIO 145. Mostre que os pontos 1, 2, 5 e 6 do teorema anterior são válidos para funções em  $L^1$ .

EXERCÍCIO 146. Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e suponha que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy \in \mathcal{S}.$$

Mostre que, para  $\xi \neq 0$ ,

$$\hat{F}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi} \hat{f}(\xi).$$

TEOREMA 24. *Se  $\phi \in \mathcal{S}$  então  $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ . Adicionalmente, a transformada de Fourier como aplicação de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$  é contínua. Como tal, define, por transposição, uma aplicação de  $\mathcal{S}' \mapsto \mathcal{S}'$ .*

NOTA. A transposta da transformada de Fourier de um elemento  $u$  de  $\mathcal{S}'$  é também denotada por  $\hat{u}$ , como sugere a identidade de Parseval.

DEMONSTRAÇÃO. Claramente, a transformada de Fourier está bem definida em  $\mathcal{S}$  e é linear. Para mostrar continuidade comecemos por observar que

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = C_{\alpha,\beta} (D^\alpha x^\beta f(x))^\wedge,$$

para constantes  $C_{\alpha,\beta}$  apropriadas. Cada aplicação da forma

$$T_{\alpha,\beta} f = D^\alpha x^\beta f(x)$$

é, pelo exercício 138, contínua em  $\mathcal{S}$ . Portanto, basta mostrar que se  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}$  então

$$\hat{f}_n \rightarrow 0$$

uniformemente. Para isso é suficiente observar que

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\xi)| &= \left| \int f_n(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int f_n(x) \right| \leq C_{k,0}(f_n) \int \frac{1}{(1+|x|^2)^k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande fixo, quando  $n \rightarrow \infty$ . ■

EXERCÍCIO 147. *Determine, em função da dimensão  $d$ , para que valores de  $k$  se tem  $(1+|x|^2)^{-k} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .*

PROPOSIÇÃO 8. *Se  $f \in \mathcal{S}'$  temos:*

1.  $(Df)^\wedge = 2\pi i \xi \hat{f}$
2.  $(-2\pi i x f)^\wedge = D_\xi \hat{f}$
3.  $(\tau_h f)^\wedge = e^{-2\pi i \xi h} \hat{f}$

DEMONSTRAÇÃO. Isto é uma consequência simples do método de transposição. Para provar a primeira afirmação basta observar

$$\begin{aligned}\langle (Df(x))^\wedge(\xi), \phi(\xi) \rangle &= \langle Df(x), \hat{\phi}(x) \rangle = -\langle f(x), D\hat{\phi}(x) \rangle = \\ &= -\langle f(x), (-2\pi i \xi \phi(\xi))^\wedge(x) \rangle = \langle \hat{f}, 2\pi i \xi \phi(\xi) \rangle = \\ &= \langle 2\pi i \xi \hat{f}, \phi(\xi) \rangle.\end{aligned}$$

A segunda e terceira afirmações provam-se de modo semelhante. ■

PROPOSIÇÃO 9. *A transformada de Fourier de  $e^{-\pi|x|^2}$  é  $e^{-\pi|\xi|^2}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos calcular

$$\int e^{-2\pi i \xi \cdot x - \pi|x|^2} dx = e^{-\pi|\xi|^2} \prod_{j=1}^d \int e^{-\pi(x_j + i\xi_j)^2} dx.$$

Para cada  $j$  entre 1 e  $d$ , mudando o contorno de integração, o integral

$$\int e^{-\pi(x_j + i\xi_j)^2} dx = \int e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

■

EXERCÍCIO 148. *Mostre que  $u(x) = e^{-\pi x^2}$  é a única solução da equação diferencial*

$$u' + 2\pi x u = 0,$$

*com  $u(0) = 1$ . Mostre que  $\hat{u}(x)$  também satisfaz a mesma equação e condição inicial e conclua que  $\hat{u}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$*

TEOREMA 25 (Inversão). *Seja  $f \in \mathcal{S}$ . Então*

$$(\hat{f})^\vee = f,$$

onde

$$g^\vee(x) = \int g(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Utilizando sucessivamente as identidades 1 e 6 do teorema 23 temos

$$\int \hat{f}(\xi) e^{-\pi \epsilon^2 |\xi|^2} d\xi = \int f(x) \frac{e^{-\pi \frac{|x|^2}{\epsilon^2}}}{\epsilon^d} dx.$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pelo exercício 49, o termo da direita da última expressão tende para  $f(0)$ . Portanto

$$f(0) = \int \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Aplicando este resultado a  $\tau_{-x}f$  obtemos

$$f(x) = (\tau_{-x}f)(0) = \int (\tau_{-x}f)^\wedge(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

■

EXERCÍCIO 149. *Calcule as seguintes transformadas de Fourier em  $\mathcal{S}'$*

1.  $e^{2\pi i x \eta}$
2.  $e^{-x}H(x)$ , onde  $H(x)$  é a função de Heaviside
3.  $\delta$
4.  $\text{sgn}(x)$
5.  $H(x)$
6.  $\frac{1}{x}$
7.  $\sin(2\pi x)$
8.  $x \sin(2\pi x)$
9.  $\frac{1}{x(1+x)}$
10.  $e^{-\pi i |x|^2}$ .
11.  $x^2$ .

EXERCÍCIO 150 (Núcleo de Poisson). *Seja*

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

*Determine a sua transformada de Fourier. Observando que  $\epsilon^{-1}P(\frac{x}{\epsilon}) \rightarrow \delta$  construa uma nova prova para o teorema de inversão da transformada de Fourier substituindo a exponencial  $\epsilon^{-1}e^{-\pi x^2/\epsilon^2}$  por  $\epsilon^{-1}P(\frac{x}{\epsilon})$ .*

EXERCÍCIO 151 (Núcleo de Fejér). *Calcule*

$$K(x) = \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

*Proceda como no exercício anterior e determine uma nova prova para o teorema de inversão da transformada de Fourier.*

EXEMPLO 21 (Convolução e teorema do limite central). *Seja  $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  uma função não negativa tal que*

$$\int p(x) dx = 1.$$

*Suponha adicionalmente que*

$$\int x p(x) dx = 0 \quad \int x^2 p(x) dx = \frac{1}{2\pi}.$$

A função  $p$  representa a densidade de probabilidade de uma variável aleatória com média nula e variância  $\pi$ . A função de distribuição de probabilidade de  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição  $p$  é simplesmente o produto

$$p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n).$$

Assim, uma função  $\phi$  da soma de  $n$  variáveis aleatórias tem como valor esperado

$$E\phi(S_n) = \int \phi(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

EXERCÍCIO 152. *Mostre que*

$$E\phi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \int \phi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)q(y)dy,$$

onde

$$q(y) = p * p * \cdots (n \text{ vezes}) * p.$$

Seja  $\phi = \hat{\psi}$ , para  $\psi \in \mathcal{S}$ . Pelo exercício anterior e pela identidade de Parseval

$$E\phi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \int \sqrt{n}\psi(\sqrt{n}\xi)\hat{p}(\xi)^nd\xi = \int \psi(\eta)\hat{p}\left(\frac{\eta}{\sqrt{n}}\right)^nd\eta.$$

EXERCÍCIO 153. *Determine  $\hat{p}'(0)$  e  $\hat{p}''(0)$ . Mostre, utilizando a série de Taylor, que para cada  $\eta$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p}\left(\frac{\eta}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\pi\eta^2}{n}\right)^n = e^{-\pi\eta^2}.$$

O exercício anterior e o teorema da convergência dominada implicam

$$E\phi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \int \psi(\eta)e^{-\pi\eta^2}d\eta = \int \phi(y)e^{-\pi y^2}dy.$$

◀

EXERCÍCIO 154. *Seja  $\delta_k = \tau_{-k}\delta$  e*

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k.$$

*Mostre que  $u \in \mathcal{S}'$  e mostre que a sua transformada de Fourier é*

$$\hat{u} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k \xi}.$$

EXERCÍCIO 155. *Seja  $c_k$  uma sucessão satisfazendo  $|c_k| \leq C(1 + |k|^2)^N$  para algum  $N$  fixo. Mostre que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

*define um elemento de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .*

NOTA. Este exercício mostra que certas séries divergentes podem ser interpretadas como distribuições.

EXERCÍCIO 156. *Mostre que se  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  então*

1.  $\hat{u} \in C^\infty$ ;
2.  $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N$ , para algum  $N$  e  $C$  apropriados.

EXERCÍCIO 157. *Mostre que*

$$\left( \frac{1}{x_1 + ix_2} \right)^\wedge = \frac{C}{\xi_1 + i\xi_2},$$

*para uma constante apropriada  $C$ .*

EXERCÍCIO 158. *Utilizando transformada de Fourier, estude em  $\mathcal{S}'$  as seguintes equações*

- (1)  $\Delta u = f$
- (2)  $u_t - \Delta u = f$ ,  $u(x, t_0) = u_0(x)$
- (3)  $P(D_x)u = f$ , com  $P(\cdot)$  um polinómio com coeficientes constantes.

TEOREMA 26 (T. de Fourier de medidas positivas). *Seja  $h$  uma função contínua limitada em  $\mathbb{R}$ . Então  $h$  é a transformada de Fourier de uma medida finita positiva se e somente se para todo o  $\phi \in \mathcal{D}$*

$$\iint h(x - y) \bar{\phi}(x) \phi(y) dx dy \geq 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\mu$  uma medida finita positiva em  $\mathbb{R}$  e  $h$  a sua transformada de Fourier. Então, para qualquer  $\phi \in \mathcal{S}$

$$0 \leq \int |\hat{\phi}|^2 d\mu = \int (|\hat{\phi}|^2)^\vee h(\xi) d\xi.$$

Temos

$$(|\hat{\phi}|^2)^\vee = \left( \bar{\hat{\phi}} \hat{\phi} \right)^\vee = \bar{\phi}^\# * \phi,$$



onde  $\bar{\phi}^\sharp(z) = \bar{\phi}(-z)$  Assim

$$0 \leq \iint h(\xi) \bar{\phi}(\eta - \xi) \phi(\eta) d\eta d\xi = \iint h(\eta - \zeta) \bar{\phi}(\zeta) \phi(\eta) d\eta d\zeta.$$

Para estabelecer a implicação oposta, basta observar que, como  $h$  é uma função contínua limitada, pode ser identificado com um elemento de  $\mathcal{S}'$ . A desigualdade do teorema e os cálculos anteriores implicam que

$$\langle \hat{h}, |\hat{\phi}|^2 \rangle \geq 0,$$

e, portanto,  $\hat{h}$  pode ser identificado com uma medida positiva (ver exercício 143). ■

## 2. Teorema de Plancherel

**TEOREMA 27.** *A transformada de Fourier estende-se de  $\mathcal{S}$  a  $L^2$  como transformação linear contínua de  $L^2 \mapsto L^2$ . Adicionalmente*

$$\|\phi\|_{L^2} = \|\hat{\phi}\|_{L^2}.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $f \in \mathcal{S}$ . Então

$$\int |f|^2 = \int f (\bar{f})^\wedge = \int \hat{f} \bar{\hat{f}} = \int |\hat{f}|^2.$$

Portanto, a transformada de Fourier definida no subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $L^2$  é uma isometria e logo estende-se por continuidade a todos os pontos de  $L^2$ , como segue do exercício seguinte:

**EXERCÍCIO 159.** *Seja  $E$  um espaço vectorial normado e  $F$  um espaço vectorial normado completo (espaço de Banach). Seja  $A$  um conjunto denso em  $E$  e  $L : A \mapsto F$  uma transformação linear satisfazendo*

$$\|Lx\| \leq C\|x\|.$$

*Mostre que existe uma única extensão de  $L$  a  $E$  que satisfaz a mesma estimativa. Prove também que se, adicionalmente,*

$$\|Lx\| \geq c\|x\|,$$

*a extensão satisfaz esta mesma estimativa.*

■

TEOREMA 28 (Princípio de incerteza). *Seja  $\psi \in \mathcal{S}$  satisfazendo  $\int |\psi|^2 = 1$ . Então*

$$\int |x\psi|^2 \int |\xi\hat{\psi}|^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$[D_x, x]\psi \equiv D_x(x\psi) - xD_x\psi = \psi.$$

Consequentemente, se  $\int |\psi|^2 = 1$ , temos

$$\begin{aligned} 1 &= \int \bar{\psi}[D_x, x]\psi = \int \bar{\psi}D_x(x\psi) - \bar{\psi}xD_x\psi \leq \\ &\leq 2 \left( \int |x|^2 |\psi|^2 \right)^{1/2} \left( \int |D\psi|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Plancherel

$$\int |D\psi|^2 = 4\pi^2 \int |\xi|^2 |\hat{\psi}|^2,$$

o que conclui a prova. ■

TEOREMA 29 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja  $\phi \in L^1$  então*

$$\hat{\phi}(\xi) \rightarrow 0$$

*quando  $|\xi| \rightarrow \infty$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\epsilon > 0$ . Para provar o teorema é suficiente mostrar que existe  $R$  tal que  $|\xi| > R$  implica

$$|\hat{\phi}(\xi)| \leq \epsilon.$$

Sabemos que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  é denso em  $L^1$ . Portanto, existe  $\psi \in \mathcal{S}$  tal que

$$\|\psi - \phi\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo

$$\|(\psi - \phi)^\wedge\|_{L^\infty} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado,  $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$  e, assim sendo, existe  $R$  tal que, se  $|\xi| > R$ ,

$$|\hat{\psi}| < \frac{\epsilon}{2},$$

ou seja, se  $|\xi| > R$ ,

$$|\hat{\phi}(\xi)| \leq |\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)| \leq \epsilon.$$

■

EXERCÍCIO 160. Seja  $f \in L^2$ . Mostre que

$$\int f(x)e^{-\pi\epsilon^2|x|^2-2\pi ix\cdot\xi}dx \rightarrow \hat{f},$$

em  $L^2$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . **Sugestão:** considerar primeiro o caso em que  $f \in \mathcal{S}$  e depois usar densidade.

EXERCÍCIO 161. Utilizando a transformada de Fourier, mostre que

$$\frac{\sin 2\pi mx}{\pi x} \rightarrow \delta,$$

quando  $m \rightarrow \infty$ , em  $\mathcal{S}'$ .

EXERCÍCIO 162. Seja  $\nu$  uma medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$ . Suponha que a seguinte estimativa é conhecida:

$$\left| \int \varphi' d\nu \right| \leq C \|\varphi\|_{L^\infty},$$

para todo o  $\varphi \in C^1 \cap L^\infty$ . Mostre que  $\nu$  tem uma densidade que é uma função  $L^2$ . **Sugestão:** aplique o resultado a  $\varphi = e^{-2\pi i\xi x}$  e mostre que  $\hat{\nu}$  é um elemento de  $L^2$ .

### 3. Teorema de Paley-Wiener

TEOREMA 30. Seja  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e consideremos a extensão da transformada de Fourier  $\hat{u}$  ao plano complexo. As seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $u$  é de classe  $C^\infty$  e tem suporte em  $\{|x| \leq a\}$
2.  $\hat{u}$  é analítica e, para qualquer  $m > 0$ , é válida a seguinte estimativa:

$$(20) \quad |\hat{u}(\xi)| \leq C_m(1 + |\xi|)^{-m} e^{2\pi a |\operatorname{Im} \xi|},$$

para uma constante apropriada  $C_m$ .

DEMONSTRAÇÃO. Para provar  $1 \implies 2$ , basta observar que a exponencial  $e^{-2\pi ix\xi}$  é uma função analítica em  $\xi$ , satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann, pelo que não é difícil verificar que

$$\int u(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$$

satisfaz também as equações de Cauchy-Riemann. A segunda parte, a estimativa, é deixada como exercício:

EXERCÍCIO 163. *Seja  $u$  de classe  $C^\infty$  com suporte em  $\{|x| \leq a\}$ . Mostre que, para qualquer  $m > 0$ , a estimativa (20) é válida, para uma constante apropriada  $C_m$ .*

Na outra direcção, se  $\hat{u}$  for analítica e satisfizer (20) então  $\hat{u} \in \mathcal{S}$  e portanto  $u \in \mathcal{S}$ . Deste modo

$$u(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Mudando o contorno de integração

$$u(x) = \int_{\text{Im } \xi = \eta} e^{2\pi i x \xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Logo

$$|u(x)| \leq e^{2\pi(a|\eta| - x\eta)} \int \frac{C_m}{(1 + |\xi|)^m} d\xi.$$

Escolhendo  $m = 2$  e  $\eta = t \frac{x}{|x|}$  para  $t > 0$  obtemos

$$|u(x)| \leq C e^{2\pi(a - |x|)t}.$$

Portanto, quando  $|x| > a$ , fazendo  $t \rightarrow \infty$ , obtemos  $u(x) = 0$ . ■

EXERCÍCIO 164. *Mostre que  $u \in \mathcal{E}'$  com suporte em  $\{|x| \leq a\}$  se e somente se  $\hat{u}$  é analítica e existe  $N$  tal que*

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N e^{2\pi a |\text{Im } \xi|}.$$

#### 4. Espaços de Sobolev - II

Nesta secção, vamos considerar espaços de Sobolev  $W^{m,p}$  em que o expoente de integrabilidade é  $p = 2$ . Pelo teorema de Plancherel, estes espaços podem ser estudados utilizando a transformada de Fourier.

Para  $s$  inteiro positivo, o espaço de Sobolev  $H^s \equiv W^{s,2}$  é o conjunto das funções  $f \in L^2$  cujas derivadas no sentido das distribuições até à ordem  $s$  são elementos de  $L^2$ , isto é

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 < \infty.$$

A transformada de Fourier e o teorema de Plancherel fornecem uma maneira cómoda de reescrever a condição anterior como

$$(21) \quad \int \sum_{|\alpha| \leq s} (2\pi)^{2|\alpha|} |\xi^{2\alpha}| |\hat{f}|^2 d\xi < \infty.$$

EXERCÍCIO 165. *Mostre que (21) é verificada se e somente se*

$$(22) \quad \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 < \infty.$$

Assim, é natural definir o espaço de Sobolev  $H^s$  para valores de  $s \in \mathbb{R}$  como o conjunto das distribuições cujas transformadas de Fourier são funções que satisfazem a estimativa:

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 < \infty.$$

TEOREMA 31. *Temos as seguintes propriedades*

1.  $H^0 = L^2$ .
2.  $f \in H^s$  então  $Df \in H^{s-1}$ .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira parte segue do teorema de Plancherel. Para mostrar a segunda basta observar que

$$(Df)^\wedge = 2\pi i \xi \hat{f}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|Df\|_{H^{s-1}}^2 &= \int (1 + |\xi|^2)^{s-1} |(Df)^\wedge|^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 \int (1 + |\xi|^2)^{s-1} |\xi|^2 |\hat{f}|^2 d\xi \\ &\leq 4\pi^2 \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}|^2 d\xi. \end{aligned}$$

■

EXERCÍCIO 166. *Verifique que se  $s < r$  então  $H^r \subset H^s$ .*

EXERCÍCIO 167. *Decida, em função de  $n$  inteiro, para que valores de  $s \in \mathbb{R}$  se tem  $\delta^{(n)} \in H^s(\mathbb{R})$ .*

Para  $s \geq 0$ ,  $H^s$  é um espaço de funções pois  $\hat{f} \in L^2$ . Para além disso, todas as derivadas no sentido das distribuições de ordem menor ou igual a  $s$  são funções.

TEOREMA 32. *Se  $f \in H^1$  então*

$$\|f\|_{H^1}^2 \simeq \int |f|^2 + |Df|^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Esta equivalência é óbvia pelo teorema de Plancherel.

■

Os espaços  $H^s$  são espaços de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^s} = \int (1 + |\xi|^2)^s \overline{\hat{u}(\xi)} \hat{v}(\xi).$$

EXERCÍCIO 168. *Mostre que a expressão anterior define um produto interno em  $H^s$  e que a norma correspondente é a norma de  $H^s$ .*

Tal como na maioria dos espaços considerados, as funções de classe  $C^\infty$  são densas nos espaços de Sobolev.

TEOREMA 33. *Seja  $u \in H^s$ . Então existe uma sucessão  $u_n$  de funções de classe  $C^\infty$  tais que*

$$\|u - u_n\|_{H^s} \rightarrow 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\rho_n$  uma sucessão regularizante satisfazendo as hipóteses do exercício 54. Então  $|\hat{\rho}| \leq 1$  e

$$\hat{\rho}_n = \hat{\rho}(\xi/n) \rightarrow 1,$$

pontualmente. Portanto

$$u_n = \rho_n * u$$

é de classe  $C^\infty$  e satisfaz

$$\hat{u}_n = \hat{\rho}_n \hat{u} \rightarrow \hat{u}$$

pontualmente. Portanto, pelo teorema da convergência dominada,

$$\|u - u_n\|_{H^s}^2 = \int |\hat{u} - \hat{u}_n|^2 (1 + |\xi|^2)^s \rightarrow 0.$$

■

EXERCÍCIO 169. *Seja  $u \in H^s$ . Mostre que existe uma sucessão  $u_n \in \mathcal{D}$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $H^s$ .*

Um dos principais resultados sobre espaços de Sobolev é que, para  $s$  suficientemente grande,  $H^s$  é um espaço de funções contínuas.

TEOREMA 34. *Se  $s > d/2$  então as funções em  $H^s$  são contínuas.*

NOTA. Sendo rigoroso, o espaço  $H^s$  deve ser entendido como um espaço de classes de equivalência de funções. Este teorema significa que é possível escolher um representante contínuo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $u \in H^s \cap C^\infty$ . Então

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| \int \hat{u}(\xi) (e^{2\pi i x \cdot \xi} - e^{2\pi i y \cdot \xi}) d\xi \right| \\ &\leq \int |\hat{u}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \frac{|e^{2\pi i x \cdot \xi} - e^{2\pi i y \cdot \xi}|}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} d\xi \\ &\leq \left( \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \right)^{1/2} \left( \int \frac{|e^{2\pi i x \cdot \xi} - e^{2\pi i y \cdot \xi}|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{H^s} \omega(x, y), \end{aligned}$$

com

$$(23) \quad \omega(x, y) = \left( \int \frac{|e^{2\pi i x \cdot \xi} - e^{2\pi i y \cdot \xi}|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2}.$$

Para  $s > d/2$  tem-se  $(1 + |\xi|^2)^{-s} \in L^1$ , portanto, pelo teorema da convergência dominada, a função  $\omega(x, y) \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow x$ . Mostramos assim que  $u$  tem um módulo de continuidade que só depende da norma  $H^s$ .

Dado um elemento  $u \in H^s$ , existe pelo teorema (33) uma sucessão  $u_n \in C^\infty$  que converge para  $u$  em  $H^s$ . O raciocínio anterior acrescenta que estas funções são uma família equicontínua; pelo teorema de Ascoli-Arzelà podemos extrair uma subsucessão que converge uniformemente para uma função contínua  $\tilde{u}$  que é um representante contínuo de  $u$ . ■

EXERCÍCIO 170. *Melhore o resultado do teorema anterior mostrando que para  $s > \frac{d}{2}$  as funções em  $H^s(\mathbb{R}^d)$  são Hölder contínuas e determine o expoente Hölder em função de  $s$  e de  $d$ . Sugestão: determine uma estimativa explícita para (23) utilizando*

$$|e^{2\pi i x \cdot \xi} - e^{2\pi i y \cdot \xi}| \leq \min\{C|\xi||x - y|, 2\}.$$

EXERCÍCIO 171. *Mostre que o espaço  $H^s(\mathbb{R}^d)$  é completo.*

**4.1. Equações com coeficientes constantes.** Uma das aplicações principais dos espaços de Sobolev é o estudo de equações diferenciais parciais. Em particular, no caso de equações com coeficientes constantes os espaços  $H^s$  são especialmente interessantes e permitem provar diversas estimativas importantes.

EXEMPLO 22. Consideremos a equação

$$u - \Delta u = f.$$

Então, se  $f \in H^s$  temos  $u \in H^{s+2}$ , pois aplicando a transformada de Fourier

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + 4\pi^2|\xi|^2}.$$

◀

Muitas vezes é interessante considerar soluções de equações diferenciais mesmo quando não existe regularidade suficiente para definir solução no sentido habitual.

EXEMPLO 23. Consideremos o problema de valor inicial

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = f.$$

Efectuando a transformada de Fourier em  $x$  obtemos

$$\hat{u}_t = -4\pi^2|\xi|^2\hat{u}, \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{f}.$$

Portanto

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi).$$

Estes cálculos, que são válidos para soluções clássicas, podem ser estendidos para condições iniciais muito pouco regulares. Com efeito, se  $f \in H^{s_0}$  com  $s_0 \in \mathbb{R}$  temos para  $t > 0$

$$u(\cdot, t) \in H^s,$$

para qualquer  $s \in \mathbb{R}$ .

◀

EXERCÍCIO 172. Utilize transformada de Fourier em  $x$  para obter uma fórmula para a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{quando } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$



*Nota: o objectivo é obter uma fórmula em termos das transformadas de Fourier de  $f$  e  $g$  e não a sua justificação.*

EXERCÍCIO 173. *Utilize transformada de Fourier em  $x$  para obter uma fórmula para a solução do seguinte problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{quando } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

*Nota: o objectivo é obter uma fórmula em termos das transformadas de Fourier de  $f$  e  $g$  e não a sua justificação. Comente, no entanto, o resultado obtido e compare com o exercício anterior.*

**4.2. Traços.** Por vezes é importante considerar funções em  $H^s$  que se anulam em determinados conjuntos. Assim, definimos o conjunto  $H_0^s(U)$  como sendo a restrição a  $U$  do fecho, com a norma  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , do conjunto dos elementos de  $\mathcal{D}$  com suporte em  $U$ . Moralmente, o conjunto  $H_0^s(U)$  é o conjunto das funções em  $H^s$  que se anulam em  $\partial U$  e que são prolongadas por 0 em  $U^c$ .

O conjunto  $H^s(U)$  pode ser definido como  $H_0^s(U^c)^\perp$ . Podemos pensar em  $H^s(U)$  como um conjunto de funções em  $H^s(\mathbb{R}^d)$  com valores arbitrários em  $\bar{U}$  e que são prolongados de forma adequada para  $U^c$ , como mostra o próximo exercício.

EXERCÍCIO 174. *Seja  $u \in \mathcal{D} \cap H^s(U)$ . Mostre que em  $U^c$  a função  $u$  satisfaz*

$$-\Delta u + u = 0.$$

TEOREMA 35 (Teorema do Traço). *Seja  $s > 1/2$ . Existe uma única aplicação linear contínua*

$$T : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$$

*definida, para  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , por restrição ao plano  $x_n = 0$ :*

$$(24) \quad (Tu)(x_1, \dots, x_{d-1}) = u(x_1, \dots, x_{d-1}, 0).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que a aplicação  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$  definida por (24) é contínua de  $H^s(\mathbb{R}^d)$  para  $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ , sendo que imediatamente se estende, de modo único, por continuidade

para  $H^s$  uma vez que  $\mathcal{D}$  é denso em  $H^s$  (ver exercício 159). Seja então  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  e  $v = Tu$ . Utilizando a notação  $\eta = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$  e  $\xi = (\eta, \xi_d)$ , temos

$$\hat{v}(\eta) = \int \hat{u}(\eta, \xi_d) d\xi_d.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\hat{v}(\eta)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\eta, \xi_d) d\xi_d \right|^2 \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi_d \right) \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_d \right). \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 175. *Mostre que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_d \leq C(1 + |\eta|^2)^{1/2-s}.$$

Assim, pelo exercício anterior,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + |\eta|^2)^{s-1/2} |\hat{v}|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi.$$

■

## Séries de Fourier

### 1. Fórmula de soma de Poisson

PROPOSIÇÃO 10. *Temos a seguinte identidade em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo exercício 154, sabemos que ambos os termos desta identidade são elementos de  $\mathcal{S}'$ . Seja

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x}.$$

Então

$$(25) \quad \tau_1 u = u$$

e

$$(e^{2\pi i x} - 1)u = 0.$$

Como  $u$  é periódica e  $e^{2\pi i x} - 1$  tem zeros simples nos inteiros, o exercício 110 e a fórmula (25) implicam

$$u = c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k.$$

Resta mostrar que  $c = 1$ . Para isso, seja  $\chi$  a função característica de  $[0, 1]$  e vamos calcular  $\chi * u$ . Seja  $\phi$  em  $\mathcal{D}$ . Temos:

$$\begin{aligned}\langle \chi * u, \phi \rangle &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k e^{2\pi i k x} \phi(x + y) dx dy \\ &= \sum_k \int_0^1 e^{-2\pi i k y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k z} \phi(z) dz dy \\ &= \sum_k \left( \int_0^1 e^{-2\pi i k y} dy \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k z} \phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) dz,\end{aligned}$$

ou seja,

$$u * \chi = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \sum_k \delta_k * \chi, \phi \rangle &= \int_0^1 \sum_k \langle \delta_k(y), \phi(x + y) \rangle dx \\ &= \sum_k \int_0^1 \phi(x + k) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx,\end{aligned}$$

de onde se conclui que  $c = 1$ . ■

TEOREMA 36 (Fórmula da Soma de Poisson). *Seja  $u \in \mathcal{E}'$  então*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x},$$

*como identidade entre elementos de  $\mathcal{D}'$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\phi \in \mathcal{D}$ . Pela proposição 10,

$$(26) \quad \langle u * \sum_k \delta_k, \phi \rangle = \langle u * \sum_k e^{2\pi i x k}, \phi \rangle.$$

O primeiro termo é

$$\begin{aligned}\langle \sum_k \delta_k * u, \phi \rangle &= \sum_k \langle u(x), \langle \delta_k(y), \phi(x + y) \rangle \rangle = \\ &= \sum_k \langle u(x), \phi(x + k) \rangle = \langle \sum_k \tau_k u, \phi \rangle.\end{aligned}$$

O termo do lado direito de (26) é

$$\begin{aligned}\langle u * \sum_k e^{2\pi i x k}, \phi \rangle &= \sum_k \langle u(x), \int e^{2\pi i k y} \phi(x+y) dy \rangle \\ &= \sum_k \langle u(x), e^{-2\pi i k x} \int e^{2\pi i k z} \phi(z) dz \rangle \\ &= \sum_k \hat{u}(k) \int e^{2\pi i k x} \phi(x) dx,\end{aligned}$$

ou seja

$$u * \sum_k e^{2\pi i x k} = \sum_k \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Portanto

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}.$$

■

O próximo teorema é um corolário da fórmula de soma de Poisson e da observação de que as translações inteiras de uma função com suporte suficientemente perto da origem têm suportes disjuntos.

**TEOREMA 37** (Shannon-Nyqvist). *Seja  $f$  uma função tal que  $\hat{f}$  tem suporte em  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Então  $f$  pode ser unicamente determinada pelo seus valores nos inteiros  $f(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Aplicado o teorema anterior a  $f^\vee$  temos

$$\sum_k f^\vee(\xi - k) = \sum_k f(k) e^{2\pi i k \xi}.$$

Sabemos  $f^\vee(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ , e como os suportes de  $f^\vee(\xi - k)$  são disjuntos temos

$$\hat{f}(\xi) = \sum_k f(k) e^{-2\pi i k \xi},$$

para cada  $\xi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

■

**EXERCÍCIO 176.** *Demonstre a fórmula da soma de Poisson em  $\mathbb{R}^d$ .*

## 2. Séries de Fourier

Nesta secção estuda-se a representação de distribuições e funções periódicas pelas suas séries de Fourier, o análogo para funções periódicas da transformada de Fourier.

Vamos começar por mostrar um resultado auxiliar:

LEMA 8. *Existe uma função não negativa  $\psi \in \mathcal{D}$  tal que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \psi = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\eta \in \mathcal{D}$  uma função não negativa tal que  $\eta(x) \equiv 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ . Vamos definir

$$\psi(x) = \frac{\eta(x)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \eta(x)}.$$

A soma no denominador é, para cada ponto  $x$ , uma soma finita, 1-periódica e nunca se anula. Deste modo, é fácil verificar que  $\psi$  tem as propriedades desejadas. ■

A primeira aplicação deste lema consiste em provar que as distribuições 1-periódicas podem ser encaradas como distribuições no toro  $\mathbb{T}^1 \equiv S^1$ .

TEOREMA 38. *Seja  $u$  uma distribuição 1-periódica em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Então existe uma única distribuição  $\tilde{u}$  em  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^1)$  tal que para cada  $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  se tem*

$$(27) \quad \langle \tilde{u}, \phi \rangle_{\mathbb{T}^1} = \langle u, \psi \phi^\sharp \rangle,$$

onde  $\phi^\sharp$  é o levantamento 1-periódico de  $\phi$  para uma função de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por outro lado, dada uma distribuição  $\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^1)$ , existe uma única distribuição 1-periódica  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  que satisfaz (27).

DEMONSTRAÇÃO. Claramente (27) define uma distribuição em  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^1)$ . Vamos agora mostrar que, dado  $\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^1)$ , existe uma distribuição periódica  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  que satisfaz (27). Seja  $\phi \in \mathcal{S}$  e  $u$  dado por

$$\langle u, \phi \rangle \equiv \langle \tilde{u}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \phi \rangle_{\mathbb{T}^1},$$

pois  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \phi$  é uma função periódica e, portanto, pode ser encarada como um elemento de  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^1)$ . Seja  $\phi^\sharp$  uma função 1-periódica. Então

$$\langle u, \psi \phi^\sharp \rangle = \langle \tilde{u}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k(\psi \phi^\sharp) \rangle_{\mathbb{T}^1} = \langle \tilde{u}, \phi^\sharp \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \psi \rangle_{\mathbb{T}^1} = \langle \tilde{u}, \phi \rangle_{\mathbb{T}^1},$$

ou seja (27). ■

É importante observar que o teorema anterior é essencial para definir correctamente as distribuições no toro. De facto, a ideia natural de identificar  $\mathbb{T}$  com  $[0, 1]$  leva rapidamente a problemas como o de calcular “ $\int_0^1 \delta(x) \varphi(x) dx$ ”, com uma série de ambiguidades evidentes.

**EXERCÍCIO 177.** *Mostre que o resultado do teorema anterior não depende da escolha de  $\psi$ , desde que satisfaça as hipóteses do lema 8.*

**EXERCÍCIO 178.** *Generalize a discussão do teorema anterior a distribuições periódicas em  $\mathbb{R}^d$  e mostre que estas podem ser encaradas como elementos de  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ .*

**TEOREMA 39.** *Seja  $u \in \mathcal{S}'$  uma distribuição 1-periódica. Então*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{2\pi i k x},$$

*em que os coeficientes de Fourier  $\hat{u}_k$  são determinados por*

$$\hat{u}_k = \langle u, \psi e^{-2\pi i k x} \rangle = \langle \tilde{u}, e^{-2\pi i k x} \rangle_{\mathbb{T}^1},$$

*com  $\psi$  tal como no lema 8. Adicionalmente,  $\hat{u}_k$  não depende da escolha de  $\psi$ , desde que satisfaça as hipóteses do lema 8.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Pela fórmula de soma de Poisson temos

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k(\psi u) = \sum_k (\psi u)^\wedge(k) e^{2\pi i k x}.$$

Seja

$$\hat{u}_k = (\psi u)^\wedge(k) = \langle u, \psi e^{-2\pi i k x} \rangle.$$

Pelo teorema anterior,

$$\hat{u}_k = \langle \tilde{u}, e^{-2\pi i k x} \rangle_{\mathbb{T}^1},$$

sendo que o resultado não depende da escolha de  $\psi$ , pelo exercício 177. ■

EXERCÍCIO 179. *Seja  $u$  uma função em  $L^1[0, 1]$ , encarada como um elemento de  $L^1(\mathbb{T}^1)$  por prolongamento periódico. Mostre que os seus coeficientes de Fourier são dados por*

$$\int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

TEOREMA 40. *Seja  $u \in L^2(\mathbb{T}^1)$  então*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{2\pi i k x},$$

*em  $L^2[0, 1]$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a soma parcial:

$$S_N u = \sum_{|k| \leq N} \hat{u}_k e^{2\pi i k x}.$$

O conjunto  $E_N = \{e^{2\pi i k x}, |k| \leq N\}$  é um conjunto ortonormado em relação ao produto interno em  $L^2$ :

$$(w, z) = \int \bar{w} z.$$

EXERCÍCIO 180. *Mostre que a soma parcial  $S_N u$  é a projecção ortogonal de  $u$  sobre  $E_N$ .*

Portanto, pelo exercício anterior,

$$\|S_N u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}.$$

Seja  $u \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^1)$  então:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{L^2}^2 = \limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 - 2 \operatorname{Re}(S_N u, u) \leq 0$$

pois  $(S_N u, u) \rightarrow \|u\|_{L^2}^2$  e  $\|S_N u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$ , ou seja,  $S_N u \rightarrow u$  em  $L^2$ .

No caso geral, para mostrar a convergência de  $S_N u$  para  $u$  em  $L^2$  vamos proceder do seguinte modo. Seja  $\epsilon > 0$  dado. Então existe  $v \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^1)$  tal que

$$\|u - v\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$



Portanto,

$$\begin{aligned} & \limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{L^2} \\ & \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - S_N v\|_{L^2} + \|S_N v - v\|_{L^2} + \|v - u\|_{L^2} \\ & \leq \epsilon + \limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N v - v\|_{L^2} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

pois  $\|S_N u - S_N v\| \leq \|u - v\|$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos o resultado desejado.  $\blacksquare$

EXERCÍCIO 181. *Seja  $u \in L^2$ . Mostre que*

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_k |\hat{u}_k|^2.$$

EXERCÍCIO 182. *Este exercício é uma prova guiada do teorema 40 utilizando um método alternativo. Seja  $u \in L^2[0, 1]$  e*

$$S_N u = \sum_{|k| \leq N} \hat{u}_k e^{2\pi i k x}.$$

*Pretende-se provar que  $S_N u \rightarrow u$  em  $L^2$ . Para este efeito, basta mostrar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $p$  tal que para  $N > p$*

$$\|u - S_N u\|_{L^2} < \epsilon.$$

*Vamos proceder do seguinte modo:*

1. *Recorde que existe uma função  $v$  de contínua tal que*

$$\|u - v\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

2. *Pelo teorema de Weirstrass (ver corolário 3 ao teorema 45) existe um polinómio trigonométrico  $K_N v = \sum_{|k| \leq N} \tilde{v}_k e^{2\pi i k x}$  tal que*

$$\|v - K_N v\|_{L^\infty} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

3. *Observe que o conjunto  $E_N = \{e^{2\pi i k x}, |k| \leq N\}$  é um conjunto ortonormado com respeito ao produto interno em  $L^2$ ,*

$$(w, z) = \int \bar{w} z,$$

*e que, adicionalmente,  $S_N u$  é a projecção ortogonal de  $u$  sobre  $E_N$ . Portanto*

$$\|u - S_N u\|_{L^2} \leq \|u - K_N v\|_{L^2} \leq \|u - v\|_{L^2} + \|v - K_N v\|_{L^2} \leq \epsilon$$

$$\text{pois } \|v - K_N v\|_{L^2} \leq \|v - K_N v\|_{L^\infty}.$$

EXERCÍCIO 183. *Utilize séries de Fourier para determinar uma expressão para a solução  $u(x, t)$  do problema*

$$u_t = u_{xx}$$

com  $u(x, 0) = \sum_k \delta_k(x)$  com  $u(x, t) = u(x + 1, t)$ . Verifique que  $u$  satisfaz a equação em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ .

EXERCÍCIO 184. *Seja  $\nu > 0$  e  $\omega \in \mathbb{R}^d$  satisfazendo a condição  $|\omega \cdot k| \geq c|k|^{-\nu}$ , para todo o  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ . Utilize séries de Fourier para mostrar a existência de uma solução fundamental da equação*

$$\omega \cdot Du = 0,$$

com  $u$  periódico.

### 3. Decaimento de séries de Fourier

É natural perguntar se, para funções contínuas, a convergência das séries de Fourier é uniforme. Infelizmente, tal não é verdade. No sentido de esclarecer este problema, a primeira questão a estudar é o decaimento dos coeficientes de Fourier.

PROPOSIÇÃO 11. *Seja  $u$  uma função de classe  $C^m(\mathbb{T}^1)$ . Então*

$$|\hat{u}_k| \leq \frac{C}{|k|^m}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos, para  $k \neq 0$

$$\hat{u}_k = \int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx = \frac{1}{(-2\pi i k)^m} \int_0^1 u(x) (-2\pi i k)^m e^{-2\pi i k x} dx.$$

Integrando por partes  $m$  vezes obtemos

$$\hat{u}_k = \frac{1}{(-2\pi i k)^m} \int_0^1 u^{(m)}(x) e^{-2\pi i k x} dx,$$

ou seja  $|\hat{u}_k| = O(k^{-m})$ . ■

Este resultado pode ser ligeiramente melhorado para:

PROPOSIÇÃO 12. *Seja  $u$  de classe  $C^1$  então a sua série de Fourier é absolutamente convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela prova do teorema anterior temos

$$\hat{u}_k = \frac{1}{-2\pi i k} \int_0^1 u'(x) e^{-2\pi i k x} dx = \frac{(u')_k^\wedge}{-2\pi i k}.$$

Portanto

$$\sum_{k \neq 0} |\hat{u}_k| \leq \sum_{k \neq 0} \left| \frac{(u')_k^\wedge}{-2\pi i k} \right| \leq \left( \sum_{k \neq 0} |(u')_k^\wedge|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 k^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

■

Deixamos como exercício a prova do lema de Riemann-Lebesgue para funções contínuas, por ser semelhante à do lema (29).

EXERCÍCIO 185 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Mostre que se  $u$  é contínua e 1-periódica então  $\hat{u}_k \rightarrow 0$  quando  $|k| \rightarrow \infty$ . Sugestão: Aproxime  $u$  por uma função  $C^\infty$  e use a proposição 11.*

EXERCÍCIO 186. *Mostre que os coeficientes de Fourier  $\hat{u}_k$  de uma função  $\alpha$ -Hölder têm decaimento  $O(|k|^{-\alpha})$ . Sugestão: Observe que*

$$\int u(x) e^{-2\pi i k x} = \int u\left(x + \frac{1}{k}\right) e^{-2\pi i k x}.$$

No entanto, existem funções contínuas cuja série de Fourier tem decaimento arbitrariamente lento.

PROPOSIÇÃO 13. *Seja  $c_n$  uma sucessão que tende para zero. Então existe uma outra sucessão  $d_n$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|d_n|}{|c_n|} \geq 1$  e para a qual*

$$(28) \quad \sum_n d_n e^{2\pi i n x}$$

*converge uniformemente.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir a sucessão  $d_n$  do seguinte modo: seja  $n_j$  uma sucessão tal que  $n_j = \min\{n > n_{j-1} : c_n \leq 2^{-j}\}$ . Então  $d_{n_j} = 2^{-j}$  e  $d_n = 0$  para os termos restantes. Claramente, a série (28) converge uniformemente. ■

EXERCÍCIO 187. *Mostre que a função*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} e^{2\pi i 2^k x}$$

*é Hölder de expoente  $\alpha$ .*

EXERCÍCIO 188. Considere a função

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{se } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

e estendida periodicamente a  $\mathbb{R}$ . Justifique que  $S_N u$  não converge uniformemente para  $u$ . Calcule os coeficientes de Fourier  $\hat{u}_k$ .

Se  $u$  e  $v$  são duas funções em  $L^1(\mathbb{T}^1)$  a sua convolução é dada por

$$(u * v)(x) = \int_0^1 u(y)v(x-y)dy,$$

em que  $v$  é prolongada por periodicidade.

TEOREMA 41. Sejam  $u$  e  $v$  em  $L^1(\mathbb{T}^1)$ . Então

$$(u * v)_k^\wedge = \hat{u}_k \hat{v}_k.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned} (u * v)_k^\wedge &= \int_0^1 \int_0^1 u(y)v(x-y)e^{-2\pi i k x} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u(y)v(x-y)e^{-2\pi i k(x-y)}e^{-2\pi i k y} dx dy = \hat{u}_k \hat{v}_k. \end{aligned}$$

■

EXERCÍCIO 189. Sejam  $v, w \in L^2$ . Mostre que

$$(vw)_j^\wedge = \sum_k \hat{v}_k \hat{w}_{j-k}$$

EXERCÍCIO 190. Generalize os resultados sobre convergência  $L^2$  das séries de Fourier para funções  $\mathbb{Z}^d$ -periódicas em  $\mathbb{R}^d$ .

EXERCÍCIO 191. Generalize os espaços de Sobolev  $H^s$  para funções  $\mathbb{Z}^d$ -periódicas em  $\mathbb{R}^d$ .

EXERCÍCIO 192. Seja  $u_k$  uma sequência de funções  $\mathbb{Z}^d$ -periódicas em  $\mathbb{R}^d$  com  $\sup_k \|u_k\|_{H^1([0,1]^d)} < \infty$ . Mostre que existe  $u \in L^2([0,1]^d)$  tal que através de uma subsucessão  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2([0,1]^d)$ . Mostre que isto não é verdade se se tiver apenas  $\|u_k\|_{L^2}$  limitada.

#### 4. Núcleo de Dirichlet e convergência pontual

TEOREMA 42. *Seja*

$$D_N(x) = \sum_{j=-N}^N e^{2\pi i j x} = \frac{\sin 2\pi(N + 1/2)x}{\sin \pi x}.$$

Então para  $u \in L^1$

$$S_N u = D_N * u.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 41,

$$S_N u = D_N * u,$$

onde

$$D_N(x) = \sum_{j=-N}^N e^{2\pi i j x}.$$

Como esta é uma soma geométrica, cálculos elementares implicam

$$D_N(x) = \frac{\sin 2\pi(N + 1/2)x}{\sin \pi x}.$$

■

TEOREMA 43. *Existe uma função contínua  $u$  tal que  $S_N u$  não converge uniformemente para  $u$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Se para todas as funções  $u \in C(\mathbb{T}^1)$ ,  $S_N u \rightarrow u$  uniformemente então

$$\sup_N \|S_N u\|_{C(\mathbb{T}^1)} \leq C_u,$$

para alguma constante  $C_u$ . Então, o teorema de Banach-Steinhaus, teorema 44, implicaria que

$$\sup_N \|S_N\| \leq C,$$

em que  $\|S_N\|$  é a norma de  $S_N$  como operador de  $C(\mathbb{T}^1)$  em  $C(\mathbb{T}^1)$ , isto é:

$$\|S_N\| = \sup_{\|u\|_{C(\mathbb{T}^1)} \leq 1} \|S_N u\|_{C(\mathbb{T}^1)}.$$

Portanto, para provar o teorema é suficiente mostrar que a família de operadores  $S_N$  não tem normas uniformemente limitadas.

Temos

$$\|S_N u\| = \|u * D_N\| = \sup_x \left| \int D_N(y) u(x-y) dy \right|$$

e, portanto,

$$\|S_N\| \geq \sup_{\|u\|_{C(\mathbb{T}^1)} \leq 1} \left| \int D_N(y) u(-y) dy \right| = \|D_N\|_{L^1}.$$

Utilizando o próximo exercício, concluímos que  $\|S_N\|$  não é limitada.

EXERCÍCIO 193. *Mostre que  $\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq c \ln N$ , para  $N$  suficientemente grande.*

■

TEOREMA 44 (Banach-Steinhaus). *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $T_n : E \rightarrow F$  uma sucessão de operadores lineares contínuos. Se*

$$(29) \quad \sup_n \|T_n\| = \infty$$

*então existe  $x \in E$  tal que*

$$T_n x$$

*é ilimitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Por contradição, vamos assumir (29), mas que para cada  $x$  existe uma constante  $C_x$  tal que

$$\sup_n \|T_n x\| \leq C_x.$$

Sem perda de generalidade podemos extrair uma subsucessão, que continuaremos a denotar por  $T_n$  que satisfaz

$$\|T_n\| \geq 5^n \|T_{n-1}\|,$$

e  $\|T_1\| \geq 1$ . Dado  $\epsilon > 0$ , podemos também encontrar vectores  $x_n \in E$  tal que  $\|x_n\| = 1$  e

$$\|T_n x_n\| \geq \|T_n\| - 1.$$

Vamos escolher indutivamente uma subsucessão  $x_{i_k}$ . Seja  $i_1 = 1$ . Como, por hipótese, para todo o  $j < k$ ,  $\sup_n \|T_n x_{i_j}\|$  é limitado, é possível escolher  $i_k$  tal que

$$\|T_{i_k} x_{i_j}\| \leq 2^{i_k} \|T_{i_m}\|,$$

para todo o  $m \leq k - 1$ . Seja

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{i_k}}{2^{i_k} \|T_{i_{k-1}}\|}.$$

Então

$$\begin{aligned} \|T_{i_n} x\| &\geq \frac{1}{2^{i_n} \|T_{i_{n-1}}\|} \|T_{i_n} x_{i_n}\| - \left[ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\|T_{i_n} x_{i_k}\|}{2^{i_k} \|T_{i_{k-1}}\|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|T_{i_n}\|}{2^k \|T_{i_{k-1}}\|} \right] \\ &\geq \left(\frac{5}{2}\right)^{i_n} - c 2^{i_n} - 2 - 1, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. ■

EXERCÍCIO 194. *Seja  $f_n$  uma sucessão de funções fracamente convergente em  $L^p$ . Mostre que  $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$ .*

LEMA 9. *Seja  $u \in L^1(\mathbb{T}^1)$  tal que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|u(x)|}{|x|} dx < \infty.$$

*Então  $S_N u(0) \rightarrow 0$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned} S_N u(0) &= (D_N * u)(0) = \int \frac{\sin 2\pi(N + 1/2)y}{\sin \pi y} u(0 - y) \\ &= \int u(-y) \cos(2\pi N y) + u(-y) \frac{\cos \pi y}{\sin \pi y} \sin(2\pi N y). \end{aligned}$$

Tanto  $u(-y)$  como  $u(-y) \frac{\cos \pi y}{\sin \pi y}$  são elementos de  $L^1$ , pelo que o Lema de Riemann Lebesgue (exercício 185) garante que ambos os termos convergem para zero. ■

COROLÁRIO 1 (Teste de Dini). *Seja  $u$  uma função periódica tal que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|u(x_0 + x) - u(x_0)|}{|x|} dx < \infty.$$

*Então  $S_N u(x_0) \rightarrow u(x_0)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $g(x) = u(x_0 + x) - u(x_0)$ . Pelo lema anterior

$$S_N g(0) \rightarrow 0,$$

ou seja,  $S_N u(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . ■

### 5. Núcleo de Fejér

As séries de Fourier não permitem aproximar uniformemente funções contínuas por polinômios trigonométricos. Em vez de considerarmos as somas parciais da série de Fourier, podemos utilizar a seguinte média ponderada:

$$\sigma_N u = \frac{1}{N+1} (S_0 u + S_1 u + S_2 u + \dots S_N u)$$

as somas de Fejér.

EXERCÍCIO 195. *Mostre que se  $S_N u \rightarrow u$  uniformemente então  $\sigma_N u \rightarrow u$  uniformemente.*

O polinômio trigonométrico  $\sigma_N u$  converge uniformemente para  $u$  sempre que  $u$  é uma função contínua.

EXERCÍCIO 196 (Identidades aproximadas). *Seja  $\rho_n$  uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$  com as seguintes propriedades:*

- (1)  $\rho_n \geq 0$
- (2)  $\int \rho_n = 1$
- (3) *Para cada  $\delta$  positivo,*

$$\int_{[-1/2, 1/2] \setminus \{|x| < \delta\}} \rho_n \rightarrow 0,$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Mostre que se  $u$  é uma função contínua então*

$$\rho_n * u \rightarrow u$$

*uniformemente.*

TEOREMA 45. *Seja*

$$K_N(x) = \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x} = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \pi(N+1)x}{\sin \pi x} \right)^2.$$

*Então para  $u \in L^1$*

$$\sigma_N u = K_N * u.$$



DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 41 temos

$$\sigma_N u = K_N * u,$$

onde

$$K_N(x) = \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x}.$$

Por outro lado

$$\sin^2 \pi x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)) = \frac{2 - e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{4},$$

ou seja, após manipulações elementares,

$$K_N(x) \sin^2 \pi x = \frac{2 - e^{2\pi i(N+1)x} - e^{2\pi i(N+1)x}}{4(N+1)} = \frac{\sin^2 \pi(N+1)x}{N+1}.$$

■

COROLARIO 2. *Seja  $u \in C(\mathbb{T}^1)$ . Então*

$$\sigma_N u \rightarrow u$$

*uniformemente.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que o núcleo de Fejér,  $K_N$ , é uma identidade aproximada e aplicar o exercício 196. ■

COROLARIO 3 (Teorema de Weirstrass). *Os polinómios trigonométricos são densos em  $C(\mathbb{T}^1)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\sigma_N u$  é um polinómio trigonométrico, este corolário segue do resultado anterior. ■

EXERCÍCIO 197. *Seja  $f$  uma função contínua. Mostre que*

$$P_r f \rightarrow f,$$

*uniformemente quando  $r \rightarrow 1^-$ , onde  $P_r$  para  $0 < r < 1$  é dado por*

$$P_r f = \sum \hat{f}_k r^{|k|} e^{2\pi i k x}.$$



## Interpolação

Nesta secção estudamos alguns resultados adicionais sobre a transformada de Fourier, como seja o teorema de Hausdorff-Young, desigualdade de Bernstein e o Teorema de Paley-Wiener. Para a prova dos dois primeiros resultados vamos utilizar teoria de interpolação. Como aplicação dos métodos de interpolação são apresentados alguns exercícios de aplicação a espaços de Sobolev.

### 1. Interpolação de Riesz-Thorin

Para a prova do próximo teorema necessitamos do seguinte resultado elementar de análise complexa, cuja prova deixamos como exercício:

EXERCÍCIO 198 (Teorema das 3 linhas). *Seja  $h(z)$  uma função contínua de variável complexa com domínio  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ , limitada e analítica em  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Suponhamos que*

$$|h(z)| \leq A_j$$

*quando  $\operatorname{Re} z = j$  com  $j = 0, 1$ . Mostre que*

$$|h(z)| \leq A_0^{1-\operatorname{Re} z} A_1^{\operatorname{Re} z}.$$

*Sugestão: aplique o princípio de módulo máximo a*

$$e^{-\epsilon z(1-z)} \frac{h(z)}{A_0^{1-z} A_1^z}$$

*e faça  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

TEOREMA 46. *Seja  $T$  um operador linear,*

$$T : L^{p_0} \mapsto L^{q_0}$$

*e*

$$T : L^{p_1} \mapsto L^{q_1},$$

continuamente. Então,  $T$  pode ser estendido como operador linear contínuo

$$T : L^{p_\alpha} \mapsto L^{q_\alpha},$$

em que  $0 < \alpha < 1$  e

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q_\alpha} = \frac{1-\alpha}{q_0} + \frac{\alpha}{q_1}.$$

Adicionalmente, se para  $j = 0, 1$ ,

$$\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq A_j \|f\|_{L^{p_j}}$$

então

$$(30) \quad \|Tf\|_{L^{q_\alpha}} \leq A_0^{1-\alpha} A_1^\alpha \|f\|_{L^{p_\alpha}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar (30) é suficiente provar

$$\left| \int gTf \right| \leq A_0^{1-\alpha} A_1^\alpha.$$

para todas as funções simples  $f$  e  $g$  (isto é,  $f$  e  $g$  são combinações lineares finitas de funções características de conjuntos mensuráveis de medida finita) satisfazendo

$$\|f\|_{L^{p_\alpha}} = \|g\|_{L^{q'_\alpha}} = 1,$$

em que  $'$  denota o expoente conjugado. Vamos considerar para  $z \in \mathbb{C}$ , com  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ , as funções

$$f_z = |f|^{p_\alpha/p_z-1} f \quad g_z = |g|^{q'_\alpha/q'_z-1} g,$$

com

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}.$$

A expressão

$$\int g_z T f_z$$

é contínua em  $z$  para  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$  e analítica em  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ .

Quando  $\operatorname{Re} z = 0$ :

$$\left| \int g_z T f_z \right| \leq A_0 \|g_z\|_{L^{q'_0}} \|f_z\|_{L^{p_0}} \leq A_0,$$

para  $\operatorname{Re} z = 1$ :

$$\left| \int g_z T f_z \right| \leq A_1 \|g_z\|_{L^{q'_1}} \|f_z\|_{L^{p_1}} \leq A_1.$$

Assim, podemos aplicar o teorema das três linhas (exercício 198), que implica

$$\left| \int g_z T f_z \right| \leq A_0^{1-\operatorname{Re} z} A_1^{\operatorname{Re} z}.$$

■

TEOREMA 47 (Hausdorff-Young). *Para  $1 < p < 2$ , a transformada de Fourier pode ser estendida como operador linear contínuo de  $L^p$  para  $L^{p'}$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .*

DEMONSTRAÇÃO. A transformada de Fourier aplica  $L^1$  em  $L^\infty$  e  $L^2$  em  $L^2$ . Portanto, por interpolação, aplica  $L^{p_\alpha}$  em  $L^{q_\alpha}$ , onde

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{1} + \frac{\alpha}{2} \quad \frac{1}{q_\alpha} = \frac{\alpha}{2}.$$

Como  $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{q_\alpha} = 1$  temos para  $p = p_\alpha$ ,  $q_\alpha = p'$ .

■

EXERCÍCIO 199. *Mostre que o único expoente  $p$  para o qual a transformada de Fourier é um operador linear contínuo de  $L^p$  em  $L^p$  é  $p = 2$ . Sugestão: considere a transformada de Fourier de  $e^{-\beta\pi x^2}$ .*

TEOREMA 48 (Desigualdade de Young para convolução). *Seja  $r, p, q \in [1, \infty]$  tais que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

*Então*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

A prova deste teorema é deixada como exercício:

EXERCÍCIO 200. *Prove a desigualdade de Young, usando interpolação e as desigualdades*

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

*para obter*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

*Depois, use a desigualdade de Hölder para mostrar*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

*e interpole entre as duas últimas desigualdades.*

EXERCÍCIO 201. Seja  $\rho_n$  uma sucessão regularizante. Mostre, utilizando interpolação entre  $L^1$  e  $L^\infty$  ou o exercício anterior, que

$$\|\rho_n * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

EXERCÍCIO 202. Seja  $f \in L^1$  fixo e seja  $T_f : L^p \rightarrow L^p$  dado por

$$T_f g = f * g.$$

Mostre que

$$\|T_f\| = \|f\|_{L^1}.$$

TEOREMA 49 (Desigualdade de Bernstein). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\text{supp } \hat{f} \subset I$  para algum intervalo  $I$ . Então, para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|f\|_{L^q} \leq C|I|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^p}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Multiplicando  $f$  por  $e^{2\pi i \eta x}$  não alteramos nenhuma norma  $L^p$  mas o suporte de  $\hat{f}$  é trasladado. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que  $I = [-a, a]$  com  $a > 0$ . Seja  $\chi$  uma função tal que  $\hat{\chi} \in \mathcal{D}$ , com suporte contido em  $[-2, 2]$  e  $\hat{\chi} \equiv 1$  em  $[-1, 1]$ . Consideremos o operador

$$f \mapsto Tf = a\chi(ax) * f.$$

Este operador é a identidade quando restrito a funções cuja transformada de Fourier tem suporte em  $[-a, a]$ . Pela desigualdade de Young

$$\|Tf\|_{L^p} \leq \|a\chi(ax)\|_{L^1} \|f\|_{L^p} = \|\chi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$

Por outro lado,

$$\|Tf\|_{L^\infty} \leq \|a\chi(ax)\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = a\|\chi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}.$$

Portanto, por interpolação, obtemos

$$\|Tf\|_{L^{q_\alpha}} \leq a^\alpha C \|f\|_{L^{p_\alpha}},$$

com

$$\frac{1}{q_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p} \quad \frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p} + \alpha.$$

Portanto, como  $\frac{1}{p_\alpha} - \frac{1}{q_\alpha} = \alpha$ , temos o resultado com  $p = p_\alpha$  e  $q = q_\alpha$ .

■

EXERCÍCIO 203. Utilizando o método utilizado para provar o teorema de Riesz-Thorin demonstre o seguinte teorema de interpolação para espaços de Sobolev:

TEOREMA 50. *Seja  $T$  um operador linear,*

$$T : H^{s_0} \rightarrow H^{t_0}$$

*e*

$$T : H^{s_1} \rightarrow H^{t_1},$$

*continuamente. Então  $T$  pode ser estendido como operador contínuo*

$$T : H^{s_\theta} \rightarrow H^{t_\theta},$$

*onde  $\theta \in [0, 1]$  e  $s_\theta = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ ,  $t_\theta = (1 - \theta)t_0 + \theta t_1$ .*

EXERCÍCIO 204. *Seja  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  com todas as derivadas limitadas. Considere o operador*

$$T_\Psi u = u \circ \Psi.$$

*Mostre que, para  $s > 0$ ,  $T_\Psi$  é uma aplicação linear contínua de  $H^s$  para  $H^s$ . **Sugestão:** Demonstre o resultado para  $s$  inteiro e depois utilize o exercício anterior.*





A

## Testes

Primeiro teste - 17 de Março de 2003

- (1) Diga, justificando, quais dos seguintes são elementos de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ :
- (a)  $\phi \mapsto 1 + \phi(0)$ .
  - (b)  $\phi \mapsto \langle L, \psi \rangle$ , onde  $L \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$  e  $\psi(x, y) = \phi(x + y^2)$ .
  - (c)  $\phi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (\phi(\frac{1}{n^2}) - \phi(0))$ .
  - (d)  $\phi \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi/2} \frac{\phi(x)}{\sin x} + \phi(0) \ln \epsilon$
- (2) Calcule a derivada no sentido das distribuições de:
- (a)  $\ln |1 - x^2|$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
  - (b)  $\phi \mapsto \int f(x)(\rho * \phi)(x)$ , onde  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\rho \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ , em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
- (3) Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , com  $\int f dx = 1$ . Mostre que  $\lambda f(\lambda x) \rightarrow \delta$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .
- (4) Calcule, em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ ,  $u_t - u_{xx}$  para  $u(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}$ .

Segundo teste - 14 de Abril de 2003

- (1) Determine em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  todas as soluções da equação diferencial

$$xu_x + u = 0.$$

- (2) Seja  $c_k$  uma sucessão com  $|c_k| \leq C(1 + |k|^2)^N$ . Mostre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

define um elemento de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

- (3) Mostre que se  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  então

- $\hat{u} \in C^{\infty}$ ;
- $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N$ , para algum  $N$  e  $C$  apropriados.

- (4) Calcule as transformadas de Fourier dos seguintes elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ :

- $e^{2\pi i x \eta}$
- $x^2$
- $\frac{1}{1+x^2}$ .

### Terceiro teste - 26 de Maio

- (1) Seja  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$  uma solução clássica de

$$u_t = u_{xx}.$$

Mostre que  $\|u(\cdot, t)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}$ .

- (2) Utilize séries de Fourier para determinar uma expressão para a solução  $u(x, t)$  do problema

$$u_t = u_{xx}$$

com  $u(x, 0) = \sum_k \delta_k(x)$  com  $u(x, t) = u(x + 1, t)$ . Verifique que  $u$  satisfaz a equação em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ .

- (3) Seja  $f$  uma função em  $C(\mathbb{T})$ . Considere a aplicação ( $0 < r < 1$ )

$$f \mapsto P_r f = \sum_k r^{|k|} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Escreva  $P_r f$  como uma convolução e mostre que  $P_r f \rightarrow f$  uniformemente quando  $r \rightarrow 1$ .

- (4) Decida se  $\ln(x^2 + y^2) \in W^{2,p}(B_1(0))$  para algum  $1 \leq p \leq \infty$ . Sugestão: pode ser-lhe útil calcular  $\Delta u$  em  $\mathcal{D}'$ .

### Quarto teste - 2 de Junho de 2003

- (1) Decida se as seguintes aplicações são elementos de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

- (a)  $\phi \mapsto \hat{\phi}(1)$ ;
- (b)  $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x^2 + y^2) dx dy$ ;
- (c)  $\phi \mapsto \int_0^1 \frac{1}{1+\phi^2}$ .

- (2) Calcule a transformada de Fourier dos seguintes elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

- (a)  $\frac{1}{1+x^2}$

- (b)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta'_k$   
 (3) Mostre que a função

$$\sum_k 2^{-k\alpha} e^{2\pi i 2^k x}$$

é Hölder contínua.

- (4) Mostre que o único expoente  $p$  para o qual a transformada de Fourier é contínua de  $L^p$  para  $L^p$  é  $p = 2$ . Sugestão: considere a transformada de Fourier de  $e^{-\beta\pi x^2}$ .

Quinto teste - 5 de Junho de 2003

- (1) Seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  dado por

$$u = |x|^{2-d},$$

para  $d > 2$ . Calcule  $\Delta u$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

- (2) Utilize transformada de Fourier em  $x$  para obter uma fórmula para a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{quando } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Nota: o objectivo é obter uma fórmula em termos das transformadas de Fourier de  $f$  e  $g$  e não a sua justificação.

- (3) Mostre que uma solução clássica de  $\frac{3}{2}u - \Delta u = f$  em  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$  ( $d > 2$ ) com  $u = 0$  em  $\partial B_1(0)$  satisfaz

$$\int \frac{3}{2}u^2 + |\nabla u|^2 = - \int f u \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

Utilize esta desigualdade para mostrar que

$$\|u\|_{L^{p^*}(B_1(0))} \leq C\|f\|_{L^2}$$

para algum  $p^* > 2$ .

- (4) Seja  $f \in C(\mathbb{T}^1)$ ,  $S_N f$  a soma parcial da série de Fourier e  $\sigma_N f$  a soma de Fejér. Mostre que se  $S_N f \rightarrow f$  uniformemente então  $\sigma_N f \rightarrow f$  uniformemente.



## Bibliografia

- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [Fri98] F. G. Friedlander. *Introduction to the theory of distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. With additional material by M. Joshi.
- [Kat76] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.
- [Ric] M. Ricou. *Medida e Integração*. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [Roy88] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [Ste93] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [SW71] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.
- [Vie] F. Viegas. *Introdução à teoria das distribuições*. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [Wil95] Michel Willem. *Analyse harmonique réelle*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1995.