

CÁLCULO DE VARIAÇÕES

DIOGO AGUIAR GOMES

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

INTRODUÇÃO

A disciplina *Cálculo de Variações* tem como objectivo o estudo de problemas variacionais e das suas relações com equações diferenciais parciais.

Esta disciplina é leccionada no Instituto Superior Técnico a alunos do quinto ano da licenciatura em Matemática Aplicada e Computação dos ramos de Análise, Geometria e Topologia e de Análise Numérica, do Mestrado em Matemática Aplicada e do Doutoramento em Matemática.

1. SUMÁRIO

O programa da cadeira está dividido em quatro partes com duração aproximada, referente às aulas teóricas, dividida do seguinte modo:

1. Problemas modelo em cálculo de variações - 8 horas.
2. Cálculo de variações e problemas elípticos - 15 horas.
3. Controlo óptimo e soluções de viscosidade - 10 horas.
4. Problemas lineares - 6 horas.

A primeira parte é a introdução à disciplina. Esta é dividida numa breve revisão de cálculo de variações em dimensão finita, com ênfase nas técnicas que podem ser generalizadas para dimensão infinita, e na discussão informal dos problemas que serão considerados ao longo da cadeira. Em primeiro lugar, deduz-se a equação de Euler-Lagrange, a segunda variação e condições necessárias para a existência de mínimo. Em segundo lugar, discutem-se alguns problemas de controlo óptimo e as suas relações com equações de Hamilton-Jacobi. Finalmente, consideram-se problemas de programação linear em dimensão infinita e as suas relações com equações diferenciais parciais não lineares.

A segunda parte é dedicada a problemas variacionais cuja equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial parcial elíptica, possivelmente não linear. Prova-se a existência de mínimo utilizando o método directo do cálculo de variações. Mostra-se que o mínimo é uma solução fraca da equação de Euler-Lagrange e estuda-se a sua regularidade. Esta última é analisada utilizando métodos de energia, estimativas de deGiorgi-Nash-Moser e estimativas de Schauder.

Na terceira parte consideram-se problemas de controlo óptimo. Estudam-se resultados clássicos da teoria de controlo, o princípio da programação dinâmica e o princípio de máximo de Pontryagin, bem como técnicas recentes da teoria das soluções de viscosidade para equações de Hamilton-Jacobi. Considera-se o problema de valor terminal e estacionário. Prova-se existência e unicidade de solução para o problema terminal e existência para o estacionário.

A última parte é uma breve introdução à programação linear em dimensão infinita e às suas relações com equações diferenciais parciais não lineares. São estudados os problema de Mather e de transporte óptimo de massa de Monge-Kantorowich. Estes têm relações importantes com equações de Hamilton-Jacobi e com a equação de Monge-Ampère, respectivamente.

2. PROGRAMA DETALHADO

O programa detalhado da disciplina é o seguinte:

0. Introdução.

- a. *Optimização em dimensão finita - problemas não lineares*: existência e unicidade de mínimo; convexidade; testes de primeira e segunda ordem; multiplicadores de Lagrange.
- b. *Programação linear*: problema primal e dual; dualidade fraca e forte; complementaridade.
- c. *Equação de Euler-Lagrange e segunda variação*: condições necessárias para a existência de mínimo; equação de Euler-Lagrange; segunda variação; convexidade.
- d. *Controlo óptimo*: problema terminal; princípio da programação dinâmica; equação de Hamilton-Jacobi.

- e. *Problemas lineares e equações diferenciais não lineares*: problema de Mather; problema de Mather estocástico; problema de Monge-Kantorowich.

1. Cálculo de variações e problemas elípticos

- a. *Método directo do cálculo de variações*: coercividade; semi-continuidade inferior fraca; existência de minimizantes.
- b. *Equações de Euler-Lagrange*: soluções fracas das equações de Euler-Lagrange.
- c. *Métodos de energia*: teorema de Lax-Milgram; existência de soluções fracas da equação de Euler-Lagrange em $W^{2,2}$.
- d. *Continuidade Hölder para equações elípticas escalares em forma de divergência (deGiorgi - Nash - Moser)*: subsoluções e supersoluções; método de iteração de Moser; lema de John-Nirenberg; desigualdade de Harnack; continuidade Hölder.
- e. *Estimativas de Schauder*: espaços de Campanato e Morrey; teorema de Morrey; estimativas de Schauder; regularidade $C^{2,\alpha}$ para minimizantes.

2. Controlo óptimo e soluções de viscosidade

- a. *Problemas de controlo óptimo*: problema de horizonte finito com custo terminal; princípio da programação dinâmica; princípio de máximo de Pontryagin; pontos regulares e diferenciabilidade.
- b. *Soluções de viscosidade*: equações de Hamilton-Jacobi; função valor como solução de viscosidade; unicidade de solução de viscosidade.
- c. *Problemas estacionários*: problema de horizonte infinito com desconto α ; limite $\alpha \rightarrow 0$ e existência de solução estacionária.

3. Problemas lineares

- a. *Dualidade*: teorema de Fenchel-Rockafellar; cálculo de problemas duais do problema de Mather e do problema de Monge-Kantorowich; equação de Monge-Ampère.

- b. *Aplicações*: teoria de Aubry-Mather; relação com equações de Hamilton-Jacobi; conjuntos invariantes e teorema do gráfico; comportamento assintótico da dinâmica Hamiltoniana.

3. ENSINO E AVALIAÇÃO

A carga horária consiste em 3 horas de aulas teóricas e 2 horas de aulas práticas semanais durante 13 semanas.

Embora as aulas teóricas sigam de perto as notas da cadeira [Gom03], é encorajada a consulta, por parte dos alunos, de bibliografia adicional. Esta inclui livros clássicos de cálculo de variações [Gia83], [Gia93], de equações diferenciais parciais [Eva98] e equações elípticas [GT01], [CC95], soluções de viscosidade [Lio82], [Bar94] [FS93], [BCD97], bem como de alguns trabalhos e artigos recentes em revistas do mais alto nível científico, que incluem, entre outras, [FV89], [LPV88], [Gom02], [Eva99], [JKO98], [Vil], [Vil03].

Apesar desta disciplina não ser um estudo exaustivo de cálculo de variações, ela trata um conjunto bastante vasto de problemas em tempo reduzido. Deste modo, é indispensável a realização por parte dos alunos de exercícios para a consolidação da matéria. Assim, existe uma ampla selecção de exercícios, quer nas notas da cadeira [Gom03], quer na bibliografia complementar.

A avaliação de conhecimentos é realizada em 5 testes ao longo do semestre, sendo a nota final a média dos 3 melhores. Foram incluídos nas notas da cadeira diversos exercícios modelo.

As datas previstas para os testes são as seguintes:

- (1) 15 de Outubro
- (2) 12 de Novembro
- (3) 10 de Dezembro
- (4) 17 de Dezembro (teste global)
- (5) 19 de Dezembro (teste global)

Os testes, com excepção do último, serão realizados durante as aulas práticas

BIBLIOGRAFIA

- [Bar94] Guy Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

- [BCD97] Martino Bardi and Italo Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.
- [CC95] Luis A. Caffarelli and Xavier Cabré. *Fully nonlinear elliptic equations*, volume 43 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Eva99] Lawrence C. Evans. Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer. In *Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA)*, pages 65–126. Int. Press, Boston, MA, 1999.
- [FS93] Wendell H. Fleming and H. Mete Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [FV89] Wendell H. Fleming and Domokos Vermes. Convex duality approach to the optimal control of diffusions. *SIAM J. Control Optim.*, 27(5):1136–1155, 1989.
- [Gia83] Mariano Giaquinta. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, volume 105 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
- [Gia93] Mariano Giaquinta. *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [Gom02] Diogo Aguiar Gomes. A stochastic analogue of Aubry-Mather theory. *Nonlinearity*, 15(3):581–603, 2002.
- [Gom03] D. Gomes. *Cálculo de Variações e Equações Diferenciais Parciais*. Instituto Superior Técnico, 2003.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [JKO98] Richard Jordan, David Kinderlehrer, and Felix Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1):1–17 (electronic), 1998.
- [Lio82] Pierre-Louis Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.
- [LPV88] P. L. Lions, G. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan. Homogenization of hamilton-jacobi equations. *Preliminary Version*, 1988.
- [Vil] C. Villani. Optimal transportation, dissipative pdes and functional inequalities. *preprint*.
- [Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.