

APONTAMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL EXTERIOR

Carlos Rocha

May 6, 1993

Conteúdo

1.	Introdução - Vectores e Covectores	1
2.	Definições e Exemplos	2
3.	Álgebra Multilinear	3
4.	Formas Diferenciais	8
5.	Formas Fechadas e Formas Exactas	24
6.	Exemplos de Aplicação: Campo Electromagnético Relativista .	27
7.	Bibliografia	30

Prefácio

Os apontamentos que se seguem constituem uma introdução ao cálculo diferencial exterior e foram coligidos durante um curso de Análise Matemática III, leccionado em 86-87 a uma turma especial constituída por um grupo de alunos que voluntariamente seguiram um curso mais extenso e aprofundado que o curso habitualmente leccionado nas licenciaturas de engenharia. Um curso semelhante anteriormente leccionado por Luís Magalhães proporcionou a experiência e as notas às quais estes apontamentos ficam a dever.

Tendo voltado a leccionar a turma especial em 91-92 verifiquei que estas notas após algumas adaptações continuam a ser de utilidade para os alunos complementando em certos aspectos a descrição desta matéria que se encontra actualmente feita nas folhas de Complementos de Cálculo Diferencial de Luís Magalhães.

A bibliografia indicada neste capítulo do curso inclui os livros *Calculus on Manifolds* de M. Spivak e *Functions of Several Variables* de W. Fleming.

Se estas notas ficam a dever muito ao apoio de Luís Magalhães, não ficam a dever menos ao esforço e deliberação semanal dos alunos que constituíram uma fonte insubstituível de motivação. Ao primeiro agradeço, aos segundos dedico estas folhas.

1. Introdução - Vectores e Covectores

O espaço vectorial linear \mathbb{R}^n munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ diz-se um espaço Euclidiano. Os elementos deste espaço vectorial dizem-se **vectores** (contravectores). Sendo e_1, \dots, e_n uma base do espaço, qualquer vector $v \in \mathbb{R}^n$ se pode representar pelas suas componentes (contravariantes) $v = (v^1, \dots, v^n) = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, apresentadas matricialmente na forma de coluna.

Ao conjunto dos funcionais lineares definidos sobre \mathbb{R}^n , $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dá-se o nome de **espaço dual** de \mathbb{R}^n e denota-se por $(\mathbb{R}^n)^*$. Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ são chamados **covectores**.

Sendo $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ um covector fixo, é um exercício simples mostrar que existem (a_1, \dots, a_n) , números reais, tais que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ temos $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n a_i v^i$, podendo identificar-se φ com $a = (a_1, \dots, a_n)$. Assim, o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vectorial linear isomorfo a \mathbb{R}^n e os covectores podem-se representar por matrizes linha $a = (a_1, \dots, a_n)$ sendo a_i as componentes (covariantes) de $a \in (\mathbb{R}^n)^*$, e introduzindo-se o **produto escalar** entre elementos de \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$, $a \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i v^i$.

Define-se a **base natural** para o espaço dual constituída pelos funcionais (e^1, \dots, e^n) satisfazendo $e^i \cdot e_j = \delta_j^i$.

Dada uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e sendo (e_1, \dots, e_n) e $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ bases respectivamente de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , temos que $t = \sum_{j=1}^n t^j e_j \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^m x^i \epsilon_i \in \mathbb{R}^m$ e se $x = L(t)$ obtemos $x^i = \sum_{j=1}^n c_j^i t^j$ onde c_j^i são as componentes dos vectores $v_j = L(e_j)$. Pode assim representar-se L pela matriz cujas colunas são os vectores v_j , e as componentes do vector t transformam-se nas do vector x multiplicando matricialmente por $L = [c_j^i]$ à **esquerda**.

$$L = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$$

Considerando agora os espaços duais podemos a partir de L definir uma transformação linear $L^* : (\mathbb{R}^m)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ da seguinte forma. Dado que $x = L(t)$, temos que $x^i = L^i(t)$ onde L^i são funcionais lineares sobre \mathbb{R}^n , definindo covectores w^1, \dots, w^m de $(\mathbb{R}^n)^*$ representados pelas linhas da matriz $L = [c_j^i]$, $L^i(t) = w^i \cdot t$, com $w^i = \sum_{j=1}^n c_j^i e^j$ onde (e^1, \dots, e^n) é a base natural de $(\mathbb{R}^n)^*$ referida.

Então, dado um covector $a = (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}^m)^*$ definimos a transformação dual L^* por $L^*(a) = \sum_{i=1}^m a_i w^i \in (\mathbb{R}^m)^*$. Sendo $b = L^*(a)$, temos $b = \sum_{j=1}^n b_j e^j$ e de $w^i = \sum_{j=1}^n c_j^i e^j$ obtem-se $b = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n c_j^i e^j$ e portanto $b_j = \sum_{i=1}^m a_i c_j^i$. Conclui-se assim que as componentes do covector a se transformam nas do covector b multiplicando matricialmente por $L = [c_j^i]$ à **direita**.

$$b \cdot t = a \cdot x \iff L^*(a) \cdot t = a \cdot L(t)$$

No caso em que $n = m$ e L é não singular, se pretendermos identificar \mathbb{R}^n com o dual $(\mathbb{R}^n)^*$ verificamos que a transformação induzida por L em $(\mathbb{R}^n)^*$ é $(L^*)^{-1}$ e $L^* = L^T$ e portanto os **vetores** e os **covectores** transformam-se em geral de **maneira diferente**.

As formas diferenciais são introduzidas pela necessidade de se considerarem funções que associam números reais a certos tipos de variedades. Apresentam-se seguidamente alguns exemplos extraídos do Electromagnetismo, onde a quantidade final (um número real) se obtem por integração das grandezas referidas sobre as variedades indicadas:

- (1) Campo Eléctrico : curva \rightarrow trabalho
- (2) Corrente : superfície \rightarrow intensidade de corrente
- (3) Densidade de Carga : volume \rightarrow carga

Acrescenta-se como caso especial a função escalar habitual

- (0) Potencial Eléctrico : ponto \rightarrow potencial

Tendo em consideração os primeiros exemplos apresentados, é natural definirem-se integrandas especiais (formas diferenciais de ordem k) a fim de se obter o resultado final por integração sobre a variedade (de dimensão k) pretendida.

2. Definições e Exemplos

Designaremos seguidamente por $V = \mathbb{R}^n$ o espaço vectorial de base, e seja $V^k = V \times \dots \times V$.

Definições: Uma função $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ **multilinear** diz-se um **tensor (covariante) de ordem k em V** , (tensor- k) ou **covector- k** . O espaço das

aplicações multilineares de V^k em \mathbb{R} (conjunto dos tensores- k) designa-se por $\mathcal{T}^k(V)$.

Nota: $\mathcal{T}^k(V)$ é um espaço vectorial linear (de dimensão n^k). Acordaremos por tomar por definição $\mathcal{T}^0(V)$ como o espaço das funções escalares.

Exemplos:

(1) $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ é o nosso conhecido espaço dual constituído por covectores. Assim $e^i \in \mathcal{T}^1(V)$, para $i = 1, \dots, n$.

(2) Dados $v, w \in V$ a função $\varphi(v, w) = \langle v, w \rangle$ ($\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$) definida pelo produto interno em V é bilinear, e portanto $\varphi \in \mathcal{T}^2(V)$.

(3) Dados $v_1, \dots, v_n \in V$ a função $\delta(v_1, \dots, v_n) = \det V$ onde V representa a matriz $v = [v_1, \dots, v_n]$ é multilinear e portanto $\delta \in \mathcal{T}^n(V)$.

Nota: Os dois últimos exemplos de tensores possuem uma propriedade adicional. Além de serem funções multilineares são **alternados**, isto é,

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in V$.

De igual forma se pode definir o conjunto dos **tensores contravariantes** de ordem k sobre V :

Definição: As funções em $\mathcal{T}^k(V^*)$ dizem-se **tensores contravariantes** de ordem k ou **vectores- k** .

Sendo $L : V \rightarrow W$ uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^n$ para $W = \mathbb{R}^m$, por extensão da definição anterior, podemos definir a transformação $L^* : \mathcal{T}^k(W) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$, da seguinte forma:

Definição: Dada a transformação linear $L : V \rightarrow W$, define-se $L^* : \mathcal{T}^k(W) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$ fazendo corresponder a cada $T \in \mathcal{T}^k(W)$ o tensor $L^*T \in \mathcal{T}^k(V)$ dado por $L^*T(v_1, \dots, v_k) = T(Lv_1, \dots, Lv_k)$ para todo $v_1, \dots, v_k \in V$.

3. Álgebra Multilinear

Entre os vários espaços tensoriais define-se uma operação chamada **produto tensorial** para estes espaços.* Note-se que esta operação se define

*Nesta secção, a referência aos produtos tensoriais não é necessária podendo eliminar-se do encadeamento do texto.

entre vários espaços ($\otimes : \mathcal{T}^k(V) \times \mathcal{T}^l(V) \rightarrow \mathcal{T}^{k+l}(V)$) não sendo portanto “interna” a um só espaço.

Definição: Sendo $T \in \mathcal{T}^k(V)$ e $S \in \mathcal{T}^l(V)$ define-se $R = T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ por: $R(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = T(v_1, \dots, v_k)S(w_1, \dots, w_l)$ para todos $v_i, w_j \in V, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$.

São facilmente verificáveis as seguintes propriedades:

- (a) $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$
- (b) $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$
- (c) $a(S \otimes T) = (aS) \otimes T = S \otimes (aT)$
- (d) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

Como sabemos os covectores e^1, \dots, e^n formam uma base de $\mathcal{T}^1(V)$. Naturalmente $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \in \mathcal{T}^k(V)$ e temos:

Proposição: Os covectores- k $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$, em número de n^k , formam uma base do espaço $\mathcal{T}^k(V)$.

Demonstração: (a) Dada a combinação linear representando o covector nulo:

$$S = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0$$

temos:

$$S(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = 0$$

e portanto $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$ são linearmente independentes.

(b) Seja $T \in \mathcal{T}^k(V)$ e $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i \in V; 1 \leq j \leq k$ vectores de V . Então:

$$T(v_1, \dots, v_k) = T\left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Mas $e^i \cdot v_j = v_j^i$ e portanto $v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} = (e_1^{i_1} \otimes \dots \otimes e_k^{i_k}) \cdot (v_1, \dots, v_k)$. Tomando $a_{i_1, \dots, i_k} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ temos:

$$T(v_1, \dots, v_k) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \right) (v_1, \dots, v_k),$$

concluindo-se que $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$ geram $\mathcal{T}^k(V)$.

Na seção anterior, quando se definiram os espaços tensoriais, apresentámos alguns exemplos de tensores com a propriedade adicional de serem **alternados**. Os exemplos apresentados relacionam-se naturalmente com a função V utilizada nos integrais de superfície para medir volumes de paralelepípedos. Por estarmos interessados precisamente em estudar os vários volumes- n , tem especial interesse estudar os tensores com aquela propriedade.

Recordamos da álgebra linear que sendo $\sigma \in \Pi(1, \dots, k)$ uma permutação de $(1, \dots, k)$ se define o sinal da permutação por $\text{sgn } \sigma = \pm 1$, com sinal positivo se a permutação fôr par e sinal negativo se a permutação fôr ímpar.

Definição: O tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ diz-se **alternado** se dada uma permutação σ se tem:

$$T(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn } \sigma \cdot T(v_1, \dots, v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in V$.

Nota: Esta definição é equivalente à definição anterior.

Proposição: O subconjunto dos tensores alternados de ordem k é um subespaço vectorial de $\mathcal{T}^k(V)$.

Nota: Para $k > n$ o único tensor alternado é o trivial; $T = 0$.

Definição: Designa-se por $\Omega^k(V)$ o espaço dos tensores covariantes alternados de ordem k . Análogamente $\Omega^k(V^*)$ designa o conjunto dos tensores contravariantes alternados de ordem k .

Com o objectivo de introduzir uma representação para as formas diferenciais, observamos que $\Omega^k(V)$ são espaços vectoriais (de dimensão menor ou igual a n^k) e procuramos uma sua base. Designando por λ o multi-índice $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$ seja e^λ a função definida por:

$$e^\lambda(h_1, \dots, h_k) = \det(h_q^{i_p}) = \det \begin{matrix} & h_1 & \dots & h_k \\ i_1 & h_1^{i_1} & \dots & h_k^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_k & h_1^{i_k} & \dots & h_k^{i_k} \end{matrix}$$

para $h_1, \dots, h_k \in V$. Fácilmente se verifica que e^λ é multilinear e alternada, portanto $e^\lambda \in \Omega^k(V)$.

Exercício: Verificar que sendo $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$, $\mu = (j_1, \dots, j_k)$ temos $e^\lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_\mu^\lambda$ onde: $\delta_\mu^\lambda = \text{sgn } \sigma$, se λ não tem índices repetidos e μ é uma permutação σ de λ ; e $\delta_\mu^\lambda = 0$, caso contrário.

Nota: Define-se $e^\lambda = 0$ se $k > n$.

Definição: O multi-índice $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$ diz-se **crescente** se satisfaz a ordenação $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Proposição: Os tensores e^λ com λ crescente formam uma base de $\Omega^k(V)$.

Demonstração: (a) Seja S uma combinação linear de e^λ representando o tensor nulo

$$S = \sum_{[\lambda]} a_\lambda e^\lambda = 0 \quad ,$$

onde a notação $[\lambda]$ designa que o somatório se estende apenas a λ crescentes. Então, para $\mu = (j_1, \dots, j_k)$ crescente temos:

$$S(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{[\lambda]} a_\lambda \delta_\mu^\lambda = a_\mu = 0 \quad ,$$

e portanto os e^λ são linearmente independentes.

(b) Seja $\omega \in \Omega^k(V)$ um tensor alternado e $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$, $j = 1, \dots, k$, vectores de V . Então:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_k) &= \omega\left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}\right) = \sum_{\lambda=(i_1, \dots, i_k)} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{[\lambda]} \left(\sum_{\sigma \in \prod \lambda} \text{sgn } \sigma v_1^{\sigma_1} \dots v_k^{\sigma_k} \right) \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{[\lambda]} \det(v_p^{i_q}) \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad . \end{aligned}$$

Mas $e^\lambda(v_1, \dots, v_k) = \det(v_p^{i_q})$ e definindo $\omega_\lambda = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ temos:

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda(v_1, \dots, v_k)$$

concluindo-se que os e^λ com λ crescente geram o espaço $\Omega^k(V)$.

Notas: Tem-se $\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e naturalmente $\mathcal{T}^1(V) = \Omega^1(V)$.

Representação: $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda$.

Definição: Designa-se por dual do vector $h = (h^1, \dots, h^n)$ de V o covector-1 $h^* = (h_1^*, \dots, h_n^*)$ com as mesmas componentes de h , $h_i^* = h^i$, $i = 1, \dots, n$.

Nota: Facilmente se verifica que a aplicação $h \mapsto h^*$ corresponde a um isomorfismo entre V e V^* .

Entre os vários espaços $\Omega^k(V)$, $k = 1, 2, \dots$, define-se a operação **produto exterior**. Sendo $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$ e $\mu = (j_1, \dots, j_l)$ dois multi-índices define-se o multi-índice $\lambda\mu = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$. Então, dados dois tensores alternados, $\omega \in \Omega^k(V)$ e $\zeta \in \Omega^l(V)$, define-se o seu **produto exterior** $\omega \wedge \zeta \in \Omega^{k+l}(V)$ da seguinte forma:

Definição: Para $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq l \leq n$ e sendo λ e μ crescentes, define-se:

$$e^\lambda \wedge e^\mu = e^{\lambda\mu} \quad ,$$

e sendo $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda$ e $\zeta = \sum_{[\mu]} \zeta_\mu e^\mu$ define-se:

$$\omega \wedge \zeta = \sum_{[\lambda][\mu]} \omega_\lambda \zeta_\mu e^\lambda \wedge e^\mu \quad .$$

Exemplos: $n = 4$

- (a) $e^{12} \wedge e^{34} = e^{1234}$
- (b) $e^3 \wedge e^{124} = e^{3124} = e^{1234}$
- (c) $e^{14} \wedge e^{24} = e^{1424} = 0$.

Propriedades:

- (1) $(\omega + \zeta) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \zeta \wedge \eta$
- (2) $(c\omega) \wedge \zeta = c(\omega \wedge \zeta)$ onde $\omega \in \Omega^k(V)$, $\zeta \in \Omega^l(V)$
- (3) $\zeta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \zeta$
- (4) $(\zeta \wedge \omega) \wedge \eta = \zeta \wedge (\omega \wedge \eta)$

Observação: Para demonstrar (4) considerar primeiro os tensores da base, e^λ .

Naturalmente, para tensores da mesma ordem define-se o seu **produto interno** e a norma induzida, visto $\Omega^k(V)$ ser um espaço vectorial. Para

$\alpha, \beta \in \Omega^k(V)$ com $\alpha = \sum_{[\lambda]} \alpha_\lambda e^\lambda$, $\beta = \sum_{[\lambda]} \beta_\lambda e^\lambda$ temos:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{[\lambda]} \alpha_\lambda \beta_\lambda$$

$$|\alpha| = (\alpha \cdot \alpha)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{[\lambda]} (\alpha_\lambda)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Define-se uma estrutura análoga para os tensores contravariantes alternados $\Omega^k(V^*)$, onde os tensores da base e_λ são agora definidos por:

$$e_\lambda(a^1, \dots, a^k) = \det (a_{i_q}^p) = \det \begin{matrix} & i_1 & \dots & i_k \\ a^1 & a_{i_1}^1 & \dots & a_{i_k}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k & a_{i_1}^k & \dots & a_{i_k}^k \end{matrix}$$

para $a^1, \dots, a^k \in V^*$. Tomando $\gamma = \sum_{[\lambda]} \gamma^\lambda e_\lambda$ e $\xi = \sum_{[\lambda]} \xi^\lambda e_\lambda$ os produtos exterior e interno são dados por:

$$\gamma \wedge \xi = \sum_{[\lambda][\mu]} \gamma^\lambda \xi^\mu e_\lambda \wedge e_\mu , \text{ com } e_\lambda \wedge e_\mu = e_{\lambda\mu}$$

$$\gamma \cdot \xi = \sum_{[\lambda]} \gamma^\lambda \xi^\lambda , \quad |\gamma| = (\gamma \cdot \gamma)^{\frac{1}{2}} .$$

Define-se igualmente o produto escalar:

$$\omega \cdot \gamma = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda \gamma^\lambda .$$

Nota: Podemos naturalmente identificar os espaços $\Omega^1(V^*) = \mathcal{T}^1(V^*)$ com V . Assim os vectores de V são tensores-1 contravariantes.

Exercício: Verificar que o volume- k do paralelepípedo definido por $v_1, \dots, v_k \in V$ é dado por:

$$V_k(v_1, \dots, v_k) = |v_1 \wedge \dots \wedge v_k| .$$

4. Formas Diferenciais

Podemos agora definir formas diferenciais como funções de \mathbb{R}^n que tomam valores em $\Omega^k(V)$:

Definição: Dado o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, uma função $\omega : U \rightarrow \Omega^k(V)$ diz-se uma **forma diferencial** de ordem k em U . Assim, para $p \in U$ temos que $\omega(p) \in \Omega^k(V)$ e ω diz-se uma forma- k .

Utilizando a representação introduzida anteriormente podemos escrever, para cada $p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(p) e^\lambda$$

onde os coeficientes ω_λ são funções reais definidas em U , $\omega_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$. Uma forma diferencial diz-se **de classe** C^r , $r \geq 0$, se as suas funções componentes forem de classe C^r .

No conjunto das formas diferenciais vamos de seguida definir a operação **derivada exterior** que nos permite obter uma forma- $(k+1)$ a partir de uma forma- k . Começamos por definir este operador para formas-0.

Dada a forma-0 f (função escalar) de classe C^1 em U , Df representa um operador linear de $V = \mathbb{R}^n$ para \mathbb{R} , tratando-se portanto de um funcional linear. Assim, para cada $p \in U$ temos $Df(p) \in \Omega^1(V)$, e Df define uma forma-1. Esta forma diferencial que representaremos por df diz-se o **diferencial exterior** da forma-0 f .

Definição: O **diferencial exterior** da forma-0 f de classe C^1 é a forma-1 df que para cada $p \in U$ tem por componentes as derivadas parciais de f em p :

$$df(p) = (D_1f(p), \dots, D_nf(p))$$

Tomando como caso particular as funções de projecção que normalmente designamos por x^i ,

$$x^i : V \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

temos que $dx^i = (0, \dots, 1, \dots, 0) = e^i$ e portanto obtemos uma nova forma de representação das formas-1:

$$df = D_1f dx^1 + \dots + D_nf dx^n$$

ou ainda $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$.

Em completa analogia passaremos a usar a representação:

$$\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

onde $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$.

Notando que as componentes ω_λ são formas-0, podemos agora definir o diferencial exterior para formas- k .

Definição: Dada a forma- k ω de classe C^1 define-se o seu **diferencial exterior** $d\omega$ como sendo a forma- $(k+1)$ representada por:

$$d\omega = \sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

onde $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$.

Nota: Em \mathbb{R}^3 é possível estabelecer as seguintes correspondências entre as formas (0, 1, 2, ou 3) e os campos escalares f ou vectoriais $ae_1 + be_2 + ce_3$:

forma-0	f	\leftrightarrow	campo escalar
forma-1	$a\,dx + b\,dy + c\,dz$	\leftrightarrow	campo vectorial
forma-2	$a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$	\leftrightarrow	campo vectorial
forma-3	$f\,dx \wedge dy \wedge dz$	\leftrightarrow	campo escalar

É possível também estabelecer as seguintes relações simples entre o operador d e os habituais operadores grad, rot e div:

Campo escalar f	\rightarrow	f
		$d \downarrow$
grad f	\leftarrow	(forma-1) df
Campo vectorial $f = (a, b, c)$	\rightarrow	$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$
		$d \downarrow$
(à parte um sinal) rot f	\leftarrow	(forma-2) $d\omega$
Campo vectorial $f = (a, b, c)$	\rightarrow	$\xi = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$
		$d \downarrow$
div f	\leftarrow	(forma-3) $d\xi$

Em conclusão os operadores lineares grad, rot e div são casos particulares do diferencial exterior d .

Exercícios: (1) A título de exercício demonstra-se seguidamente a relação:

$$a^1 \wedge \dots \wedge a^k (v_1, \dots, v_k) = \det (a^p \cdot v_q).$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} a^1 \wedge \dots \wedge a^k (v_1, \dots, v_k) &= \sum_{j_1} a_{j_1}^1 e^{j_1} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k} a_{j_k}^k e^{j_k} (v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (a_{j_1}^1 \dots a_{j_k}^k) e^{j_1, \dots, j_k} (v_1, \dots, v_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} (a_{j_1}^1 \dots a_{j_k}^k) \det (v_q^{j_p}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (a_{j_1}^1 \dots a_{j_k}^k) \sum_{\sigma \in \Pi(1, \dots, k)} \operatorname{sgn} \sigma (v_1^{j_{\sigma_1}} \dots v_k^{j_{\sigma_k}}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} \sum_{\sigma \in \Pi(1, \dots, k)} \operatorname{sgn} \sigma (a_{j_1}^1 \dots a_{j_k}^k) (v_1^{j_{\sigma_1}} \dots v_k^{j_{\sigma_k}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi(1, \dots, k)} \operatorname{sgn} \sigma \sum_{j_1, \dots, j_k} (a_{j_1}^1 \dots a_{j_k}^k) (v_1^{j_{\sigma_1}} \dots v_k^{j_{\sigma_k}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi(1, \dots, k)} \operatorname{sgn} \sigma \sum_{j_1, \dots, j_k} (a_{j_{\sigma_1}}^{\sigma_1} \dots a_{j_{\sigma_k}}^{\sigma_k}) (v_1^{j_{\sigma_1}} \dots v_k^{j_{\sigma_k}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi(1, \dots, k)} \operatorname{sgn} \sigma \left(\sum_{i_1} a_{i_1}^{\sigma_1} v_1^{i_1} \dots \sum_{i_k} a_{i_k}^{\sigma_k} v_k^{i_k} \right) = \det (a^p \cdot v_q). \end{aligned}$$

(2) Mostrar que $\omega(h_1, \dots, h_k) = \omega \cdot (h_1^* \wedge \dots \wedge h_k^*)$.

(3) Usar as expressões anteriores para mostrar que

$$|h_1 \wedge \dots \wedge h_k| = |h_1^* \wedge \dots \wedge h_k^*| = \sqrt{\det (h_p \cdot h_q)}$$

Propriedades do diferencial exterior:

- (1) $d(\omega + \xi) = d\omega + d\xi$, com ω e ξ formas- k de classe C^1 .
- (2) $d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^k \omega \wedge d\xi$, com ω forma- k e ξ forma- l de classe C^1 .
- (3) $d(d\omega) = 0$, com ω forma- k de classe C^2 .
- (4) $d(f\omega) = f d\omega + df \wedge \omega$, com f forma-0, e ω forma- k , de classe C^1 .

Demonstração: (1) É elementar.

(2) Directamente

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \zeta) &= d\left(\sum_{[\lambda][\mu]} \omega_\lambda \zeta_\mu e^\lambda \wedge e^\mu\right) = \sum_{[\lambda][\mu]} d(\omega_\lambda \zeta_\mu e^\lambda \wedge e^\mu) \\
&= \sum_{[\lambda][\mu]} d(\omega_\lambda \zeta_\mu) \wedge e^\lambda \wedge e^\mu = \sum_{[\lambda][\mu]} [(d\omega_\lambda)\zeta_\mu + \omega_\lambda(d\zeta_\mu)] \wedge e^\lambda \wedge e^\mu \\
&= \sum_{[\lambda][\mu]} (d\omega_\lambda \wedge e^\lambda) \wedge (\zeta_\mu e^\mu) + (-1)^k (\omega_\lambda e^\lambda) \wedge (d\zeta_\mu \wedge e^\mu) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^k \omega \wedge d\zeta
\end{aligned}$$

(3) De igual forma

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge e^\lambda\right) = \sum_{[\lambda]} d\left(\sum_j \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j} dx^j \wedge e^\lambda\right) = \sum_{[\lambda]} \sum_j d\left(\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j} dx^j \wedge e^\lambda\right) \\
&= \sum_{[\lambda]} \sum_j d\left(\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j}\right) \wedge dx^j \wedge e^\lambda = \sum_{[\lambda]} \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^k \partial x^j} dx^k\right) \wedge dx^j \wedge e^\lambda \\
&= \sum_{[\lambda]} \left[\sum_{j < k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^j \partial x^k}\right)}_{=0} dx^k \wedge dx^j\right] \wedge e^\lambda = 0.
\end{aligned}$$

(4) Exercício.

Dada uma forma- n não nula $\omega = \omega_\lambda e^\lambda$ onde $\lambda = (1, \dots, n)$ e atendendo à definição de e^λ podemos concluir que sendo e_1, \dots, e_n a base de V e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ outra base com $\epsilon_j = \sum_i a_j^i e_i$, temos:

$$\omega(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \det(a_j^i) \omega(e_1, \dots, e_n).$$

Assim $\omega \in \Omega^n(V)$ separa as bases de V em dois conjuntos: aquelas para as quais $\det(a_j^i) > 0$ (tais como (e_1, \dots, e_n)); e aquelas para as quais $\det(a_j^i) < 0$. Nesta distinção é muito importante considerar-se a ordem pela qual se tomam os vectores de base. Para salientar este facto designa-se por **referencial** de V uma base ordenada de V .

A separação indicada das bases de V não depende da forma ω considerada, sendo assim natural introduzir-se um conceito de orientação para espaços vectoriais destinado a designar o tipo de referencial a considerar.

Para subespaços vectoriais de V em geral define-se orientação da seguinte forma:

Definição: Sendo v_1, \dots, v_k uma base de um subespaço vectorial V , chama-se **orientação** deste subespaço ao covector- k definido por:

$$\alpha = \frac{v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*}{|v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*|},$$

(portanto $|\alpha| = 1$).

Nota: Dado $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$ sem repetições e considerando o espaço vectorial de base e_{i_1}, \dots, e_{i_k} temos que e^λ é uma sua orientação. Para $k = n$ o espaço $V = \mathbb{R}^n$ tem duas possíveis orientações: $\pm e^{1, \dots, n}$. Chama-se **positiva** à orientação $e^{1, \dots, n}$ correspondente ao referencial $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Facilmente se estende a definição de orientação a variedades- k por consideração em cada ponto do respectivo espaço tangente.

Definição: A variedade de classe C^1 k -dimensional M é **orientável** se existe uma função contínua $o : M \rightarrow \Omega^k(V)$ tal que para cada $p \in M$, $o(p)$ é uma orientação para o espaço tangente $T_p M$.

Exercícios: **1.** $k = 1$: Neste caso, em cada ponto p de M o espaço tangente é unidimensional e as duas possíveis tangentes unitárias fornecem-nos duas possíveis orientações para $T_p M$. Obtem-se uma orientação para M atribuindo a cada $p \in M$ o dual de uma destas tangentes de forma contínua em M .

Nota: Toda a variedade-1 é orientável.



2. $k = n$: Neste caso a variedade M é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Para cada $p \in M$ temos que $T_p M = \mathbb{R}^n$ e já vimos que existem duas possíveis orientações para $T_p M : \pm e^{1, \dots, n}$.

Nota: Como no caso anterior, temos que é sempre possível orientar M tomando-se uma orientação constante $o(p) = \pm e^{1, \dots, n}$ positiva ou negativa.

3. $k = n - 1$: Este caso reveste-se de interesse especial e vamos considerá-lo com cuidado. Para cada $p \in M$ o espaço tangente $T_p M$ é $(n-1)$ -dimensional e

sendo v_1, \dots, v_{n-1} um referencial de $T_p M$ temos as duas possíveis orientações para $T_p M$:

$$o(p) = \pm \frac{v_1^* \wedge \dots \wedge v_{n-1}^*}{|v_1^* \wedge \dots \wedge v_{n-1}^*|} .$$

Sendo $\alpha = h_1^* \wedge \dots \wedge h_{n-1}^*$ um covector- $(n-1)$ não nulo define-se o covector adjunto $^*\alpha$ como sendo o covector-1 tal que:

- (1) $^*\alpha$ é normal ao subespaço gerado por h_1^*, \dots, h_{n-1}^* .
- (2) $(^*\alpha, h_1^*, \dots, h_{n-1}^*)$ é uma orientação positiva para \mathbb{R}^n .
- (3) $|^*\alpha| = |\alpha|$.

Sendo $h_j = \sum_i h_j^i e_i$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha &= h_1^* \wedge \dots \wedge h_{n-1}^* = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} h_1^{i_1} \dots h_{n-1}^{i_{n-1}} e^{i_1, \dots, i_{n-1}} \\ &= \sum_{[\lambda_i]} \sum_{\sigma \in \Pi \lambda_i} \text{sgn } \sigma (h_1^{\sigma_1} \dots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}}) e^{\lambda_i} \end{aligned}$$

e portanto $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i} e^{\lambda_i}$ onde $\lambda_i = (1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ e os α_{λ_i} são dados por

$$\alpha_{\lambda_i} = \sum_{\sigma \in \Pi \lambda_i} \text{sgn } \sigma (h_1^{\sigma_1} \dots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}}) .$$

Então tomando $^*\alpha = \sum_{i=1}^n c_i e^i$ vamos verificar que (1), (2) e (3) são satisfeitos se tomarmos

$$c_i = (-1)^{i-1} \alpha_{\lambda_i} .$$

Na verdade temos que para $k = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} ^*\alpha \cdot h_k^* &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_{\lambda_i} h_k^i = \sum_{i=1}^n h_k^i (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in \Pi \lambda_i} \text{sgn } \sigma (h_1^{\sigma_1} \dots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}}) \\ &= \sum_{\sigma' \in \Pi(1, \dots, n)} \text{sgn } \sigma' (h_k^{\sigma'_1} h_1^{\sigma'_2} \dots h_{n-1}^{\sigma'_n}) = \det [h_k \ h_1 \ \dots \ h_{n-1}] = 0 , \end{aligned}$$

verificando-se (1). Quanto a (2) temos

$$^*\alpha \wedge \alpha = ^*\alpha \wedge h_1^* \wedge \dots \wedge h_{n-1}^* = \sum_{k, [\lambda_i]} c_k \alpha_{\lambda_i} e^k \wedge e^{\lambda_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{\lambda_i} (-1)^{i-1} e^{1,\dots,n} = K e^{1,\dots,n}$$

onde $K = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{\lambda_i} (-1)^{i-1} = \sum_{i=1}^n (\alpha_{\lambda_i})^2 = |\alpha|^2 > 0$ e finalmente (3) resulta imediatamente de:

$$|^*\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n (c_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_{\lambda_i})^2 = |\alpha|^2 .$$

Poderia agora verificar-se que qualquer covector- $(n-1)$ se pode representar na forma de um produto de $n-1$ covectores-1:

$$\alpha = h_1^* \wedge \dots \wedge h_{n-1}^* .$$

Nota: Sendo α e ω covectores- $(n-1)$ temos a seguinte relação

$$^*\omega \cdot ^*\alpha = \omega \cdot \alpha .$$

Retomando o exemplo, para $k = n-1$ temos que o vector ν tal que $\nu^*(p) = ^*o(p)$ é uma normal unitária a M em p . Então M será orientável se a normal unitária a M em p pode ser escolhida continuamente em M .

Definição: Sendo D um domínio regular em \mathbb{R}^n , a normal exterior unitária define uma orientação para $M = \partial D$ designando-se por orientação positiva de M .

Nota: Em \mathbb{R}^3 facilmente se verifica a relação $(v_1 \times v_2)^* = ^*(v_1^* \wedge v_2^*)$ para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

4. Consideramos agora o caso geral de uma vizinhança de coordenadas para uma variedade M de dimensão k . Sendo $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos abertos, $U \cap M$ uma vizinhança de coordenadas de M e $g : V \rightarrow U \cap M$ uma representação paramétrica de $U \cap M$, para cada $p \in U \cap M$ temos que $D_1g(t), \dots, D_kg(t)$ com $t = g^{-1}(p)$ formam uma base do espaço T_pM . Assim, podemos definir a seguinte orientação para $U \cap M$:

$$o(p) = \frac{D_1g^*(t) \wedge \dots \wedge D_kg^*(t)}{|D_1g^*(t) \wedge \dots \wedge D_kg^*(t)|} .$$

Esta orientação diz-se induzida em $U \cap M$ por g a partir da orientação positiva em V .

Podemos finalmente definir integral de formas diferenciais sobre variedades. Naturalmente, o integral deverá depender da orientação atribuída à variedade, mudando de sinal caso a orientação seja invertida.

Definição: Sendo M uma variedade- k com orientação o , $A \subset M$ um subconjunto k -mensurável e ω uma forma diferencial de ordem k contínua em M , define-se o integral de ω sobre A com orientação o por:

$$\int_{A^o} \omega = \int_A (\omega \cdot o)$$

sempre que $\omega \cdot o$ seja integrável em A .

Notas: Relembra-se aqui que:

(1) A é k -mensurável se e só se $A = g(B)$ com B mensurável, e então :

$$v_k(A) = \int_B V_k(D_1g, \dots, D_kg) < \infty$$

(2) Então, sendo $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tem-se:

$$\int_A f = \int_A f dv_k = \int_B (f \circ g) V_k(D_1g, \dots, D_kg) .$$

Aplicações: No caso particular de ser $k = 1$ obtem-se o integral de linha em \mathbb{R}^n de um campo vectorial. Designando por C^o uma variedade-1 (curva) em \mathbb{R}^n de orientação o induzida por uma representação paramétrica g a partir da orientação positiva para o intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $C = g(I)$, e sendo $\omega = \sum_i f_i dx^i$ uma forma-1 contínua em C temos:

$$\begin{aligned} \int_{C^o} \omega &= \int_C \omega \cdot o = \int_C f \cdot \tau = \int_I (f \circ g) \cdot \frac{D_1g}{|D_1g|} V_1(D_1g) \\ &= \int_I (f \circ g) \cdot D_1g = \int_I \sum_i (f_i \circ g) \frac{dg^i}{dt} = \int_C f \cdot dg \end{aligned}$$

onde o vector τ definido por $\tau^*(p) = o(p)$ é o vector unitário tangente a C em p .

Ainda como caso particular obtem-se o integral em \mathbb{R}^n de uma função escalar fazendo $k = n$. Designando por A^+ o conjunto A com orientação positiva e^1, \dots, e^n de \mathbb{R}^n e tomando $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ temos $\omega \cdot e^1, \dots, e^n = f$ e portanto:

$$\int_{A^+} \omega = \int_A f = \int_A f(x) dv_n(x) .$$

Estudando o caso $k = n - 1$, podemos reescrever o teorema da divergência para formas diferenciais.

Teorema da Divergência: Seja D^+ um domínio regular em \mathbb{R}^n com orientação positiva, ∂D^+ a fronteira de D positivamente orientada e ω uma forma-($n-1$) de classe C^1 em \bar{D} . Então:

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega.$$

Demonstração: Usando a definição e designando por o a orientação positiva de ∂D temos

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{\partial D} \omega \cdot o = \int_{\partial D} {}^*\omega \cdot {}^*o = \int_{\partial D} \zeta \cdot \nu$$

onde se tomou $\zeta = {}^*\omega$. Por outro lado, sendo $\omega = \sum_i \omega_{\lambda_i} e^{\lambda_i}$ uma forma-($n-1$) temos que a forma- n $d\omega$ é dada por:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d\omega_{\lambda_i} \wedge e^{\lambda_i} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^j} e^j \wedge e^{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{\lambda_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^i} (-1)^{i-1} e^{1,\dots,n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i} \right) e^{1,\dots,n} = (\operatorname{div} \zeta) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{D^+} (\operatorname{div} \zeta) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_D \operatorname{div} \zeta$$

e o teorema da divergência na forma conhecida dá-nos o resultado.

No caso geral de considerarmos variedades- k cuja fronteira relativa é uma variedade-($k-1$) e formas da mesma ordem, obtemos uma expressão análoga, conhecida por fórmula de Stokes, contendo em si como casos particulares as formas clássicas dos teoremas de Green, Stokes e Gauss. Antes de iniciar o seu estudo vamos considerar o comportamento das formas diferenciais com as mudanças de coordenadas.

Seja ω uma forma- k , com $k \geq 1$, definida num subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \rightarrow D$ uma transformação de classe C^1 definida no subconjunto aberto $B \subset \mathbb{R}^m$. Então, define-se em B uma forma- k ω_g^\sharp por transporte da forma ω por g (*pull back* na literatura anglo-saxónica).

Definição: Para todo $t \in B$ temos $\omega_g^\sharp(t) = L^*\omega(x)$ onde $x = g(t)$ e $L = Dg(t)$.

Nota: Pode naturalmente definir-se a mesma operação para formas-0 fazendo $f_g^\sharp = f \circ g$.

Com base nesta definição podemos estabelecer uma fórmula de cálculo de ω_g^\sharp . Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ e tomando $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda$ temos:

$$\begin{aligned} \omega_g^\sharp(t)(v_1, \dots, v_k) &= L^*\omega(x)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \omega(x)(Lv_1, \dots, Lv_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(x) e^\lambda(Lv_1, \dots, Lv_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(x) \det [L^{i_p} \cdot v_q] \end{aligned}$$

com $\lambda = (i_1, \dots, i_k)$. Mas, atendendo a que $L = Dg(t) = [\frac{\partial g^i}{\partial x^j}(t)]$, temos que a linha i da matriz L é constituída pelos coeficientes da forma-1 dg^i e portanto:

$$\omega_g^\sharp(t)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(g(t)) dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k}(v_1, \dots, v_k) .$$

Conclui-se assim que a lei de transformação para formas diferenciais se obtém formalmente substituindo x por $g(t)$ e dx^i por $dg^i(t)$:

$$\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \longleftrightarrow \omega_g^\sharp = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda \circ g dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k}$$

Facilmente se demonstram as seguintes propriedades para esta lei de transformação:

- (a) $(\omega + \zeta)_g^\sharp = \omega_g^\sharp + \zeta_g^\sharp$,
- (b) $(\omega \wedge \zeta)_g^\sharp = \omega_g^\sharp \wedge \zeta_g^\sharp$.

A propriedade mais importante é no entanto a **invariância** da derivação exterior:

Proposição: Sendo ω uma forma- k de classe C^1 definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \rightarrow D$ uma transformação de classe C^2 definida no subconjunto aberto $B \subset \mathbb{R}^m$, temos que:

$$(d\omega)_g^\sharp = d(\omega_g^\sharp) .$$

Demonstração: No caso especial de formas-0, temos:

$$\begin{aligned}
(df)_g^\# &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right)_g^\# = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \, dg^i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \sum_{j=1}^m \frac{\partial g^i}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \frac{\partial g^i}{\partial t^j} \right) dt^j \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t^j} (f \circ g) dt^j = d(f \circ g) = d(f_g^\#) .
\end{aligned}$$

Para $k \geq 1$ temos então:

$$\begin{aligned}
d(\omega_g^\#) &= d \left(\sum_{[\lambda]} (\omega_\lambda \circ g) dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k} \right) = \sum_{[\lambda]} d[(\omega_\lambda \circ g) dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k}] \\
&= \sum_{[\lambda]} d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k} + (\omega_\lambda \circ g) d(dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k}) .
\end{aligned}$$

Mas sendo g de classe C^2 temos

$$d(dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k}) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} dg^{i_1} \wedge \dots \wedge d(dg^{i_l}) \wedge \dots \wedge dg^{i_k} = 0$$

e portanto:

$$\begin{aligned}
d(\omega_g^\#) &= \sum_{[\lambda]} d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k} = \sum_{[\lambda]} d(\omega_{\lambda_g}^\#) \wedge dg^{i_1} \wedge \dots \wedge dg^{i_k} \\
&= \sum_{[\lambda]} (d\omega_\lambda)_g^\# \wedge (dx^{i_1})_g^\# \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_g^\# = \sum_{[\lambda]} (d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_g^\# \\
&= \left[\sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right]_g^\# = (d\omega)_g^\# .
\end{aligned}$$

Com esta lei de transformação é possível calcular os integrais de formas diferenciais sobre variedades utilizando as representações paramétricas:

Proposição: Dada uma variedade- k M , e sendo A um subconjunto de uma vizinhança de coordenadas $S \subset M$ admitindo uma representação paramétrica $g : V \rightarrow S$ com $V \subset \mathbb{R}^k$ aberto, e sendo o a orientação em S induzida por g pela orientação positiva de V , temos:

$$\int_{A^o} \omega = \int_{B^+} \omega_g^\#$$

onde $A = g(B)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\int_{A^o} \omega &= \int_A \omega \cdot o = \int_B (\omega \circ g) \cdot \frac{D_1 g^* \wedge \dots \wedge D_k g^*}{|D_1 g^* \wedge \dots \wedge D_k g^*|} V_k(D_1 g, \dots, D_k g) \\
&= \int_B (\omega \circ g) \cdot D_1 g^* \wedge \dots \wedge D_k g^* = \int_B (\omega \circ g)(D_1 g, \dots, D_k g) \\
&= \int_B (\omega \circ g)(Le_1, \dots, Le_k) = \int_B L^* \omega \circ g(e_1, \dots, e_k) = \int_B \omega_g^\# \cdot e^{1, \dots, k} = \int_{B^+} \omega_g^\# .
\end{aligned}$$

É necessário igualmente considerar subvariedades, utilizando a sua representação paramétrica, sendo agora necessário prestar maior atenção às respectivas orientações. Seja M uma variedade- k , e $S \subset M$ uma vizinhança de coordenadas com representação paramétrica $g : V \rightarrow S$, $V \subset \mathbb{R}^k$. Dada uma subvariedade m -dimensional $P \subset V$ de orientação α definida por $\alpha(p) = u_1^*(p) \wedge \dots \wedge u_m^*(p)$, o conjunto $Q = g(P)$ é uma subvariedade- m de S de orientação β que se diz induzida por g a partir da orientação α em P se β fôr dada por

$$\beta(x) = \frac{Lu_1^*(p) \wedge \dots \wedge Lu_m^*(p)}{|Lu_1^*(p) \wedge \dots \wedge Lu_m^*(p)|}$$

com $x = g(p)$ e $L = Dg(p)$, $p \in P$. Obtemos então a seguinte:

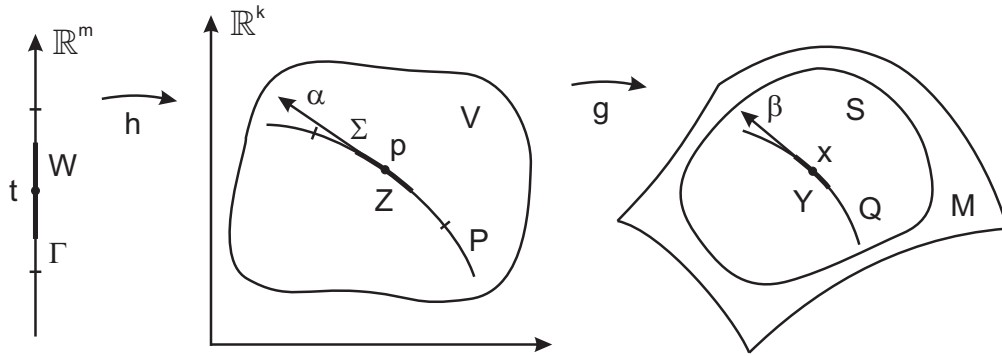
Proposição: Sendo $Y = g(Z)$ um subconjunto m -mensurável de Q e ω uma forma- m definida em Q temos que

$$\int_{Y^\beta} \omega = \int_{Z^\alpha} \omega_g^\#$$

sempre que um dos integrais exista.

Demonstração: Considera-se primeiro o caso em que existe uma vizinhança de coordenadas Σ contendo $Z = g^{-1}(Y)$ com representação paramétrica $h : \Gamma \rightarrow \Sigma$ onde Γ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m . Então, sendo $f = g \circ h$ temos que $f : \Gamma \rightarrow g(\Sigma)$ é uma representação paramétrica para uma vizinhança de coordenadas contendo Y . Sendo α a orientação em Σ induzida por h a partir da orientação positiva (negativa) em \mathbb{R}^m , facilmente se verifica que β é a orientação em $g(\Sigma)$ induzida por f a partir da orientação positiva (negativa) em \mathbb{R}^m . Supondo então \mathbb{R}^m positivamente orientado, e sendo $W = h^{-1}(Z) = f^{-1}(Y)$ o subconjunto mensurável de $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, temos:

$$\int_{Y^\beta} \omega = \int_{W^+} \omega_f^\# = \int_{W^+} (\omega_g^\#)_h^\# = \int_{Z^\alpha} \omega_g^\# .$$



Para obter o caso geral recorre-se ao uso de uma partição de unidade da forma habitual.

Podemos agora apresentar a fórmula de Stokes. Para tanto, consideramos a seguinte definição. Sendo M uma variedade- k de classe C^2 orientável, e $A \subset M$ um subconjunto relativamente aberto, isto é, existe um aberto U tal que $A = U \cap M$, A diz-se um **domínio regular** em M se:

- (1) \bar{A} é compacto;
- (2) ∂A , a fronteira relativa de A em M , é uma variedade- $(k - 1)$ de classe C^2 ;
- (3) A é o interior relativo de \bar{A} em M .

Temos finalmente o celebrado

Teorema de Stokes: Sendo M uma variedade- k de classe C^2 e de orientação o , $A \subset M$ um domínio regular em M e ω uma forma- $(k - 1)$ de classe C^1 em \bar{A} , temos:

$$\int_{A^o} d\omega = \int_{\partial A^o} \omega ,$$

onde ∂A^o designa a variedade- $(k - 1)$ ∂A com a orientação induzida a partir da orientação o .

Demonstração: Tal como anteriormente, supomos inicialmente que \bar{A} está contido numa vizinhança de coordenadas $U \cap M$ com representação paramétrica $g : S \rightarrow U \cap M$ onde S é um conjunto aberto de \mathbb{R}^k . Então tomando $B = g^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^k$ que podemos assumir com orientação positiva,

temos:

$$\int_{\partial A^o} \omega = \int_{\partial B^+} \omega_g^\# = \int_{B^+} d(\omega_g^\#) = \int_{B^+} (d\omega)_g^\# = \int_{A^o} d\omega .$$

Finalmente, para o caso geral recorre-se a uma partição de unidade.

Exemplos: Vamos seguidamente ver casos particulares do teorema de Stokes, elucidando a associação feita anteriormente entre vários operadores diferenciais e a derivação exterior.

(1) $[n = 3, k = 3]$ Seja D um domínio regular em \mathbb{R}^3 e ∂D a fronteira com orientação o induzida a partir da orientação positiva para \mathbb{R}^3 . Então, sendo:

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

uma forma-2 de classe C^2 temos:

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

e tomando $\xi = *\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ obtemos as relações:

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{D^+} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

$$\int_{\partial D^o} \omega = \int_{\partial D} \omega \cdot o = \int_{\partial D} \zeta \cdot \nu .$$

Considerando o campo vectorial $f = (P, Q, R)$ da forma-1 ζ , e transformando o produto escalar num produto vectorial, obtem-se do teorema de Stokes a forma clássica do teorema de Gauss:

$$\int_D \operatorname{div} f = \int_{\partial D} f \cdot \nu$$

(2) $[n = 3, k = 2]$ Seja agora M uma variedade-2 em \mathbb{R}^3 , A um domínio regular em M com orientação o induzida a partir da orientação positiva de \mathbb{R}^3 e ω a forma-1 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Então, temos:

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy .$$

Considerando o campo vectorial $f = (P, Q, R)$ dual de ω e tomando $\zeta = *d\omega$, o dual de ζ designa-se por $\operatorname{rot} f$. Então, sendo ∂A^o a variedade-1 ∂A

com a orientação induzida a partir de o e r uma parametrização de ∂A correspondente a esta orientação obtemos as relações:

$$\begin{aligned}\int_{A^o} d\omega &= \int_A d\omega \cdot o = \int_A \zeta \cdot \nu = \int_A \text{rot } f \cdot \nu \\ \int_{\partial A^o} \omega &= \int_{\partial A} d\omega \cdot o = \int_{\partial A} f \cdot o = \oint_{\partial A} f \cdot dr\end{aligned}$$

onde se transformou o produto escalar em vectorial. Obtemos, assim, a forma clássica do teorema de Stokes:

$$\int_A \text{rot } f \cdot \nu = \oint_{\partial A} f \cdot dr$$

Nota: É também habitual a seguinte notação para o integral de linha

$$\int_{\partial A^o} \omega = \oint_{\partial A} \omega = \oint_{\partial A} Pdx + Qdy + Rdz.$$

(3) [$n = 3, k = 1$] Seja C uma variedade-1 de \mathbb{R}^3 com uma representação paramétrica $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, e orientação o induzida por r a partir da orientação positiva de \mathbb{R} . Seja também $\omega = g$ uma forma-0 em \mathbb{R}^3 . Então

$$d\omega = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

e o vector dual designa-se por ∇g . Assim, tomando $\partial C = \{A, B\}$ onde $A = r(a)$, $B = r(b)$, como anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}\int_{C^o} d\omega &= \int_C d\omega \cdot o = \int_C \nabla g \cdot o = \int_C \nabla g \cdot dr \\ \int_{\partial C^o} \omega &= g(B) - g(A)\end{aligned}$$

obtendo-se o conhecido resultado, generalização do teorema fundamental do cálculo para integrais de linha:

$$\int_C \nabla g \cdot dr = g(B) - g(A) .$$

(4) [$n = 2, k = 2$] Neste caso, seja A uma região regular de \mathbb{R}^2 positivamente orientada e ∂A^+ a sua fronteira positivamente orientada. Então, dada a forma-1 $\omega = Pdx + Qdy$, temos $d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$ e portanto:

$$\int_{A^+} d\omega = \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$\int_{\partial A^+} \omega = \oint_{\partial A} P dx + Q dy.$$

Assim, do teorema de Stokes obtém-se o teorema de Green no plano:

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \oint_{\partial A} P dx + Q dy .$$

5. Formas Fechadas e Formas Exactas

Definição: Uma forma- k ω de classe C^1 diz-se **fechada** se $d\omega = 0$. Uma forma- k ω diz-se **exacta** se existe uma forma- $(k-1)$ ζ de classe C^1 tal que $\omega = d\zeta$.

Vimos anteriormente que sendo ω exacta, $\omega = d\zeta$ com ζ de classe C^2 então ω é fechada, $d\omega = 0$. Apresentamos agora uma recíproca parcial dada pelo Lema de Poincaré.

Vamos inicialmente introduzir um novo operador sobre as formas diferenciais que contrariamente ao operador d estudado transforma formas- k em formas- $(k-1)$. Seja η uma forma- k de classe C^1 definida em $I \times S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $I = [0, 1]$ e $S \subset \mathbb{R}^n$. Designaremos as coordenadas de \mathbb{R}^{n+1} por (x^0, x^1, \dots, x^n) . Continuaremos a designar por λ qualquer permutação dos símbolos $(1, \dots, n)$ e passaremos a designar por Λ as permutações de $(0, 1, \dots, n)$.

Então a forma η pode decompôr-se na soma de duas formas ψ e ξ da seguinte maneira:

$$\eta = \sum_{[\Lambda]} \eta_{\Lambda} e^{\Lambda} = \sum_{[\lambda_0]} \eta_{\lambda_0} e^0 \wedge e^{\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} \eta_{\Lambda_0} e^{\Lambda_0} = \psi + \xi .$$

Dada esta decomposição podemos definir um operador que designamos por \int_0^1 transformando a forma- k η numa forma- $(k-1)$ $\int_0^1 \eta$:

Definição: Dada a forma- k η define-se $\int_0^1 \eta$ como a forma- $(k-1)$ representada por:

$$\int_0^1 \eta = \sum_{[\lambda_0]} \left(\int_0^1 \eta_{\lambda_0} dx^0 \right) e^{\lambda_0} .$$

Temos assim que \int_0^1 é linear e $\int_0^1 \eta = \int_0^1 \psi$ enquanto que $\int_0^1 \xi = 0$, e da aplicação sucessiva dos operadores \int_0^1 e d obtém-se o seguinte:

Lema: Dada uma forma- k η de classe C^1 com a decomposição indicada, temos:

$$\int_0^1 d\eta + d \int_0^1 \eta = \xi(1) - \xi(0).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\eta &= \int_0^1 d\psi + d\xi = \int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} d\eta_{\lambda_0} \wedge e^{0,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} d\eta_{\Lambda_0} \wedge e^{\Lambda_0} \\ &= \int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{0,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{\Lambda_0} \\ &= - \int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} e^0 \wedge e^{i,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^0} e^0 \wedge e^{\Lambda_0} \\ &= - \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} dx^0 \right) e^{i,\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} \left(\int_0^1 \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^0} dx^0 \right) e^{\Lambda_0} \\ &= - \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 \eta_{\lambda_0} dx^0 \right) e^i \wedge e^{\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} [\eta_{\Lambda_0}(1) - \eta_{\Lambda_0}(0)] e^{\Lambda_0} \\ &= - \sum_{[\lambda_0]} d \left(\int_0^1 \eta_{\lambda_0} dx^0 \right) \wedge e^{\lambda_0} + \xi(1) - \xi(0) = -d \left[\sum_{[\lambda_0]} \left(\int_0^1 \eta_{\lambda_0} dx^0 \right) e^{\lambda_0} \right] + \xi(1) - \xi(0) \\ &= -d \int_0^1 \eta + \xi(1) - \xi(0) . \end{aligned}$$

Necessitamos em seguida da seguinte:

Definição: Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **em estrela** se existe $a \in S$ tal que para todo $x \in S$ o segmento de recta que une x a a está contido em S .

Podemos agora apresentar o seguinte:

Teorema: (Lema de Poincaré) Seja S um conjunto em estrela e $1 \leq k \leq n$. Então, toda a forma- k de classe C^1 **fechada** em S é **exacta**.

Demonstração: Sendo $a \in S$ um ponto em relação ao qual S é em estrela, podemos definir a seguinte transformação $h : I \times S \rightarrow S$, $I = [0, 1]$

$$h(x^0, x) = a + x^0(x - a) .$$

Esta transformação diz-se uma **homotopia** e simplesmente contrai o conjunto S linearmente até ao ponto a , no sentido em que $h(1, S) = S$ e $h(0, S) = a$.

Sendo ω uma forma- k de classe C^1 em S , temos que $\eta = \omega_h^\#$ é uma forma- k de classe C^1 em $I \times S$, cuja decomposição é $\eta = \xi, \psi = 0$. Então, pelo lema anterior temos:

$$\int_0^1 d(\omega_h^\#) + d \int_0^1 \omega_h^\# = \omega_h^\#(1) - \omega_h^\#(0) .$$

Mas $\omega_h^\#(1) = \omega$, $\omega_h^\#(0) = 0$, e sendo ω fechada $d(\omega_g^\#) = (d\omega)_g^\# = 0$. Fazendo $\zeta = \int_0^1 \omega_h^\#$ temos finalmente que $\omega = d\zeta$ e ω é exacta.

O Lema de Poincaré estabelece apenas uma condição suficiente S para que toda a forma- k fechada seja exacta. Uma condição necessária e suficiente foi estabelecida por de Rham.

Seja $D^k(M)$ o conjunto das formas diferenciais de ordem k de classe C^∞ definidas sobre a variedade m -dimensional M . O conjunto $D^k(M)$ é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} e tem-se $D^k(M) = \{0\}$ se $k > m$. Seja $Z^k(M) \subset D^k(M)$ o subconjunto das formas fechadas, e $B^k(M) \subset D^k(M)$ o subconjunto das formas exactas. Facilmente se verifica que $Z^k(M)$ e $B^k(M)$ também são espaços vectoriais sobre \mathbb{R} e como toda a forma exacta é fechada tem-se $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Então, define-se o espaço vectorial $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ identificando os elementos de $Z^k(M)$ que diferem de uma forma exacta (a classe residual de $Z^k(M)$ com respeito ao subespaço $B^k(M)$). Os elementos de $H^k(M)$ são classes de equivalência de formas- k fechadas, e $\omega, \omega' \in Z^k(M)$ pertencem à mesma classe de equivalência se $\omega - \omega' \in B^k(M)$. O espaço $H^k(M)$ é o **grupo de cohomologia** k de de Rham e depende essencialmente da topologia da variedade M . À dimensão d_k do espaço $H^k(M)$ chama-se **número de Betti** de ordem k da variedade M .

Exemplos: (1) Sendo $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto **simplesmente conexo** então toda a forma-1 em D fechada é exacta, e portanto $H^1(D) = \{0\}$.

(2) Sendo p o número de componentes conexas de M tem-se que $H^0(M)$ é um espaço vectorial de dimensão p . Na verdade, como $B^0(M) = \{0\}$ tem-se que $H^0(M) = Z^0(M)$ e sendo f uma função de classe C^∞ definida em M

tal que $df = 0$ (uma forma-0 fechada) tem-se que f é constante em cada componente M_j , $j = 1, \dots, p$, de M .

Tomando as funções f_j , $j = 1, \dots, p$, iguais a 1 em M_j e 0 nas outras componentes de M , tem-se que $\{f_1, \dots, f_p\}$ forma uma base de $Z^0(M)$.

(3) Do Lema de Poincaré conclui-se que

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\} \quad , \quad k > 0 \quad .$$

O teorema de de Rham afirma que toda a forma- k em M fechada é exacta se e só se $H^k(M) = \{0\}$.

6. Exemplos de Aplicação: Campo Electromagnético Relativista

Temos vindo a considerar como espaço de base o espaço euclideo V identificado com \mathbb{R}^n e vimos recentemente alguns exemplos de aplicação das formas diferenciais à Mecânica Clássica, tomando $n = 3$. Em Física é natural privilegiar as transformações de coordenadas (mudanças de referencial) que preservam as normas. Assim, na Mecânica Clássica é natural considerarem-se no espaço euclideo \mathbb{R}^3 as transformações galileanas da forma $x = Qx' + vt'$, $t = t'$ onde Q é uma transformação ortogonal (rotação).

Na Relatividade Restrita considera-se o espaço-tempo pseudo-euclideo V identificado com \mathbb{R}^4 , de componentes (x^1, x^2, x^3, x^4) , com $x^4 = ct$ sendo c a velocidade da luz, e de “norma” $\| \|^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - c^2 t^2$, identificando-se o instante presente com um cone de luz. As transformações que preservam esta “norma” são as transformações de Lorentz.

Utilizando variáveis complexas pode-se identificar V com um espaço euclideo \tilde{V} de componentes (x^1, x^2, x^3, ix^4) , passando as transformações unitárias em \tilde{V} a representar simples rotações. No caso de ser usada apenas a coordenada de espaço $x = x^1$, podemos identificar o ângulo de rotação com $\text{tg } \psi = i \frac{x}{ct} = i \frac{v}{c}$. Assim, neste caso particular, a transformação de Lorentz será dada por:

$$x = x' \cos \psi - i ct' \sin \psi = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{x'}{ic} \operatorname{sen} \psi + t' \cos \psi = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A título de exemplo podemos deduzir a lei de composição das velocidades. Sendo $\psi = \psi_1 + \psi_2$ a aplicação de duas rotações sucessivas, temos:

$$\operatorname{tg} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{\operatorname{tg} \psi_1 + \operatorname{tg} \psi_2}{1 - \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2},$$

e portanto:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

A forma mais simples de se considerar o campo electromagnético na relatividade especial é estabelecer como ponto de partida a existência de uma forma-1 Π (o quadri-vector potencial) que, quando integrado sobre uma variedade-1, nos dá o trabalho executado pelo campo Electromagnético no eventual deslocamento de uma carga ao longo desta variedade. Designando por (x^1, x^2, x^3, x^4) as coordenadas de $V(x^4 = ct)$ temos:

$$\Pi = \sum_i A_i dx^i + V dx^4$$

onde os somatórios apenas abrangem $i = 1, 2, 3$.

Então o campo electromagnético obtem-se a partir da forma-2:

$$\Phi = d\Pi = \left(\sum_i E_i e^i \right) \wedge e^4 + \sum_i B_i e^{\lambda_i}$$

onde λ_i designa uma permutação de $(1, 2, 3)$. A expressão anterior corresponde em notação clássica a

$$E = \operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \operatorname{rot} A.$$

Em consequência, sendo Φ exacta, também é fechada:

$$d\Phi = 0,$$

obtendo-se assim o primeiro conjunto das equações de Maxwell:

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} B = 0 .$$

Por outro lado, começando por tomar como ponto de partida a existência de uma forma-3, o campo relativista de cargas e correntes Ψ , que quando integrado em volumes-3 adequados, nos dão as cargas e as correntes eléctricas

$$\Psi = \sum_i \frac{J_i}{c} e^{\lambda_i} \wedge e^4 - q e^{123} .$$

A equação de continuidade é equivalente à equação:

$$d\Psi = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0.$$

Sendo Ψ uma forma fechada, e considerando uma região do espaço simplesmente conexa temos pelo lema de Poincaré que Ψ é exacta:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} d\Gamma$$

onde Γ é uma forma-2 representando o potencial relativista associado às carga e correntes:

$$\Gamma = \sum_i H_i e^i \wedge e^4 + \sum_i D_i e^{\lambda_i}$$

obtendo-se assim o segundo conjunto das equações de Maxwell

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi q .$$

Finalmente, uma relação entre estas duas formas-2 designa-se naturalmente por relação de constituição do meio:

$$\Gamma = K(\Phi) .$$

7. Bibliografia

J. CAMPOS FERREIRA - Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.

W. FLEMING - Functions of Several Variables, Springer-Verlag, 1977.

L. MAGALHÃES - Complementos de Cálculo Diferencial, 1991.

L. MAGALHÃES - Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada, Texto Editora, 1989.

M. SPIVAK - Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin, Inc., 1965.