Equação das ondas

Carlos Rocha

IST – 2018

Equação das ondas

A equação das ondas ou equação das cordas vibrantes correponde à equação às derivadas parciais linear de tipo hiperbólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0 \leq x \leq l\ ,\ t > 0\ .$$

Vamos considerar condições de fronteira de Dirichlet,

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0\ ,$$

e as condições iniciais

$$u(0, x) = f(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)\ ,\ 0 \leq x \leq l\ .$$

Separação de variáveis

Por separação de variáveis temos $u(t,x) = T(t)X(x)$, e assim

$$T''X = c^2 TX'' \ .$$

Para $TX \neq 0$ obtem-se

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ X(0) = X(l) = 0 \ ; \quad \text{e} \ \ T'' + \lambda c^2 T = 0 \ ,$$

com condições iniciais $T(0)$, $T'(0)$.

O problema de valores na fronteira só tem soluções não triviais se $\lambda = \omega^2 > 0$, obtendo-se

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x$$

$$X(0) = c_2 = 0 \quad , \quad X(l) = c_1 \operatorname{sen} \omega l = 0 \ .$$

Logo

$$\omega = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{e} \qquad X_n(x) = k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \ .$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ o problema de valores iniciais tem as soluções

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} ct \ ,$$

e portanto as soluções não triviais são da forma

$$u_n(t, x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \left[a_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} ct \right] \ .$$

Daqui conclui-se que em $t = 0$,

$$\begin{aligned} u_n(0, x) &= a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(0, x) &= b_n \frac{n\pi}{l} c \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \ , \end{aligned}$$

e formalmente deve obter-se

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) \ .$$

Das condições iniciais resulta

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \\
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{l} c \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x ,
\end{aligned}
$$

que são séries de senos, e portanto, nas condições adequadas

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx .
\end{aligned}
$$

Usando em $u_n(t,x)$ as fórmulas trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}ct &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right]\\
\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}ct &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)-\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right]\ ,
\end{aligned}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)+b_n\cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct)+b_n\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[h_+(x+ct)+h_-(x-ct)\right]\ .
\end{aligned}$$

A solução formal obtida é solução da equação das ondas se $h_\pm \in C^2$ e se para $t = 0$ forem satisfeitas as condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left[h_+(x) + h_-(x)\right] \\
g(x) &= \frac{c}{2}\left[h'_+(x) - h'_-(x)\right] \ .
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds = \frac{c}{2}\left[h_+(x) - h_-(x)\right] \ ,
$$

logo

$$
\begin{aligned}
h_+(x) &= f(x) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds \\
h_-(x) &= f(x) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds \ .
\end{aligned}
$$

Fórmula de D'Alembert

Conclui-se assim a fórmula de D'Alembert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

que, se $f \in C^2$ e $g \in C^1$, é solução da equação das ondas.

Exemplo: Seja $f(x) = \text{sen}\, \frac{\pi}{l} x$ e $g(x) = 0$. Então:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

e, como $a_n = b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ excepto $a_1 = 1$,

$$u(t,x) = \text{sen}\, \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi}{l} ct = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\, \frac{\pi}{l}(x+ct) + \text{sen}\, \frac{\pi}{l}(x-ct)\right]$$

Propagação de ondas e Onda estacionária