EDO aplicações

Carlos Rocha

IST – 2018

Dinâmica de populações

Seja $p(t)$ o total de uma população isolada. Se o incremento populacional fôr proporcional ao total da população obtem-se a lei de Malthus:

$$\frac{dp}{dt} = ap \, , \; p(t_0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Se os recursos naturais forem limitados tem-se um termo adicional correspondente à competição proporcional a p^2, obtendo-se a lei logística ou de Verhulst:

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \, , \; p(t_0) = p_0.$$

$p' = ap - bp^2 \;,\; p(t_0) = p_0$

Então $p' = p(a - bp)$:

$$p_0 = a/b \;\Rightarrow\; p(t) \equiv p_0.$$

$p_0 \neq a/b \;\Rightarrow$

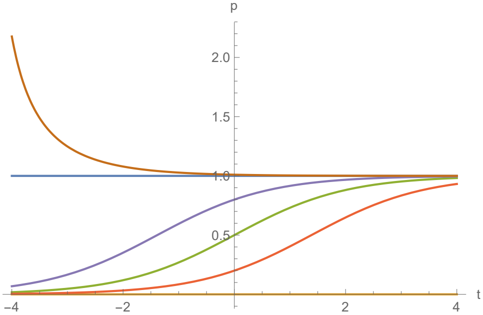
$$\frac{p'}{p(a-bp)} = 1 \quad , \quad \int_{p_0}^{p} \frac{dr}{r(a-br)} = \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{1}{a} \int_{p_0}^{p} \left[\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br} \right] dr \\ &= \frac{1}{a} \left[\log \left| \frac{p}{p_0} \right| + \log \left| \frac{a - bp_0}{a - bp} \right| \right] \\ &= \frac{1}{a} \log \left(\frac{p(t)}{p_0} \, \frac{a - bp_0}{a - bp(t)} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{p(t)}{p_0}\frac{a-bp_0}{a-bp(t)} = e^{a(t-t_0)}$$

$$p(t)(a-bp_0) = p_0(a-bp(t))e^{a(t-t_0)}$$

$$p(t) = \frac{ap_0 e^{a(t-t_0)}}{a-bp_0+bp_0 e^{a(t-t_0)}} = \frac{ap_0}{bp_0+(a-bp_0)e^{-a(t-t_0)}}$$



$$p_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} p(t) = a/b$$

Movimento com atrito

Seja M um corpo de massa m em queda livre partindo do repouso. Sem atrito a velocidade de M satisfaz a lei de Newton:

$$\frac{dv}{dt} = g\ ,\ v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = gt.$$

Considerando o atrito com o ar proporcional ao quadrado da velocidade obtem-se:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2\ ,\ v(0) = 0.$$

$v' = g - cv^2\ ,\ v(0) = 0$

$$\frac{v'}{g - cv^2} = 1 \quad , \quad \int_0^v \frac{dw}{g - cw^2} = \int_0^t ds$$

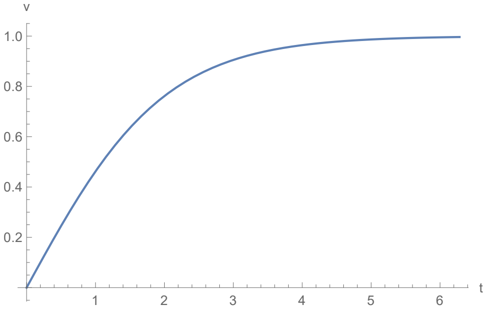
$$t = \frac{1}{c}\int_0^v \frac{dw}{g/c - w^2} = \frac{1}{2\sqrt{gc}}\int_0^v \left[\frac{1}{\sqrt{g/c} - w} + \frac{1}{\sqrt{g/c} + w}\right] dw$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g/c}} \log\left(\frac{\sqrt{g/c} + v}{\sqrt{g/c} - v}\right) \quad , \quad v < \sqrt{g/c}$$

$$\sqrt{g/c} + v = \left(\sqrt{g/c} - v\right) e^{2\sqrt{gc}\, t}$$

$$v(1 + e^{2\sqrt{gc}\, t}) = \sqrt{g/c}\, (e^{2\sqrt{gc}\, t} - 1)$$

$$v(t) = \sqrt{g/c}\, \frac{e^{2\sqrt{gc}\, t} - 1}{e^{2\sqrt{gc}\, t} + 1}.$$



Velocidade limite $\quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = \sqrt{g/c}$