

Complementos de Análise Complexa

Segundo Teste, 15/12/2007

Duração: 90 minutos
(Uma das perguntas 4,5 é opcional)

1. Seja $h(z)$ uma função inteira de ordem 1, cujos únicos zeros são simples e estão localizados nos inteiros: $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Supondo que $h(z)$ é ímpar e que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{z} = \pi$, determine a factorização de Hadamard de $h(z)$.
 - (b) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{16n^2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
2. Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ uma função holomorfa do disco unitário nele próprio. Prove que para todo $a \in \mathbb{D}$ se tem

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

(Sugestão: Considere uma função $F = \phi_1 \circ f \circ \phi_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ com $F(0) = 0$, onde ϕ_1, ϕ_2 são certos automorfismos do disco, e aplique o lema de Schwarz.)

3. Seja $f(z)$ uma função elíptica em relação a um reticulado Λ , tendo apenas um pólo num polígono fundamental para Λ .
 - (a) Mostre que $\text{Res}_w f(z) = 0$, para todo pólo w de $f(z)$.
 - (b) Supondo que a origem é um pólo triplo de $f(z)$ e que esta função é ímpar, prove que $f(z)$ é um múltiplo da função $\wp'(z)$, sendo $\wp(z)$ a função de Weierstrass do reticulado Λ .
4. Prove que uma função u é harmónica numa região Ω se e só se satisfaz a propriedade do valor médio em discos de Ω , isto é, se para qualquer $z \in \Omega$ e disco $\mathbb{D}(z, r) \subset \Omega$ centrado em z ($r > 0$), se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(z, r)} u \, dx \, dy.$$

5. Seja $f(z)$ analítica num disco $D \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $u = \Re f$ harmónica em $\mathbb{C}^*$. Seja $f_n(z)$, ($z \in D$) a função obtida por continuação analítica ao longo do caminho $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ dado por $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Mostre que, para n fixo, $f_n(z) - f(z)$ é constante em D .
 - (b) Prove que a aplicação $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi(n) = \Im(f_n(z) - f(z))$ é um homomorfismo de grupos, para qualquer $z \in D$.