

Complementos de Análise Complexa

Primeiro Teste, 20/11/2007

20 de Novembro de 2007

Duração: 90 minutos

(Uma das perguntas 3,4,5 é opcional)

1. Seja $T(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ uma transformação de Möbius, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Quais os valores que α não pode tomar? Mostre que T preserva a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e que, para $|\alpha| < 1$, $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Resolução: Para que $T(z)$ seja uma transformação de Möbius é necessário que seja invertível, o que se traduz na invertibilidade da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{bmatrix}$, cujo determinante é $1 - |\alpha|^2$. Assim, para que $T(z)$ seja transformação de Möbius, $|\alpha| \neq 1$. Como $T(\pm 1) = \frac{\alpha \mp 1}{1 \mp \bar{\alpha}} \in C$ e $T(i) = \frac{\alpha - i}{1 + i\bar{\alpha}} \in C$ e as transformações de Möbius preservam circunferências de $\mathbb{C}_\infty$, T envia a circunferência definida pelos três pontos $\pm 1, i$, (que é C) em C . Alternativamente, podemos verificar que, para $|z| = 1$, temos

$$|T(z)| = \left| \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \frac{|\bar{z}||\alpha - z|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = \frac{|\bar{z}\alpha - 1|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = \frac{|\overline{1 - \bar{\alpha}z}|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = 1.$$

Finalmente, como T é bijectiva e contínua em $\mathbb{C}_\infty$, temos $T(\mathbb{C}_\infty \setminus C) = T(\mathbb{C}_\infty \setminus C)$. Uma vez que T envia conexos em conexos, sendo $\mathbb{D}$ uma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus C$, e que $T(0) = \alpha \in \mathbb{D}$, temos que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. Seja Ω uma região no plano complexo, $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ uma função holomorfa em Ω e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(\Omega, z_0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ [\gamma] &\mapsto \int_\gamma f(z) dz. \end{aligned}$$

(a) Mostre que ψ está bem definida, é um homomorfismo de grupos e a sua imagem é um subgrupo abeliano de $(\mathbb{C}, +)$. (b) Pode, para certo $f(z)$, a imagem ser um subconjunto denso de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$? Justifique.

Resolução: (a) Para ver que ψ está bem definida, basta considerar um caminho fechado γ_1 na classe de homotopia $[\gamma] \in \pi_1(\Omega, z_0)$, e mostrar que $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$. Isto segue do facto que, por hipótese, γ e γ_1 são caminhos homotópicos

com os mesmos extremos. A aplicação ψ é um homomorfismo de grupos porque

$$\begin{aligned}\psi([\gamma_1] * [\gamma_2]) &= \psi([\gamma_1 * \gamma_2]) = \int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \psi([\gamma_1]) + \psi([\gamma_2]),\end{aligned}$$

onde a operação de grupo em $\mathbb{C}$ é a soma. Além disso, $\psi([\varepsilon_{z_0}]) = \int_{\varepsilon_{z_0}} f(z) dz = 0$, onde ε_{z_0} é um caminho constante em z_0 , e $\psi([\gamma]^{-1}) = -\int_{\gamma} f(z) dz$, usando as propriedades das classes de homotopia. Finalmente, a imagem do homomorfismo ψ é um subgrupo do grupo $(\mathbb{C}, +)$, e por isso será necessariamente abeliano.

(b) Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ e $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{2}}{z-1} \right)$, por exemplo. Então $\int_{\gamma_0} f(z) dz = 1$ e $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \sqrt{2}$, onde γ_0 e γ_1 são duas circunferências com $I(\gamma_j, j) = 1$, $j = 0, 1$, que apenas se intersectam em $z_0 = \frac{1}{2}$. Então, para todo γ caminho fechado com ponto base z_0 , temos $\int_{\gamma} f(z) dz = m + n\sqrt{2}$, onde $m = I(\gamma, 0)$, $n = I(\gamma, 1)$. Pretendemos mostrar que o conjunto $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Isto equivale a mostrar que o conjunto $A := \{n\sqrt{2} \bmod 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso no intervalo $[0, 1]$. Todos os termos de A são distintos (caso contrário $n\sqrt{2} = m$ teria soluções m, n inteiras). Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, há pelo menos um par de elementos de $A_k := \{0, \sqrt{2} \bmod 1, \dots, k\sqrt{2} \bmod 1\}$ cuja distância, módulo 1, é inferior a $1/k$. Sejam então $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|(n_1 - n_2)\sqrt{2} \bmod 1| < \frac{1}{k}$. Assim, a distância (mod 1) entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência

$$\left\{ 0, (n_1 - n_2)\sqrt{2} \bmod 1, (n_1 - n_2)2\sqrt{2} \bmod 1, \dots \right\} \subset A$$

é menor que $1/k$. Como k é arbitrário, concluímos que A é denso em $[0, 1]$.

- Seja $g(z)$ holomorfa no disco aberto centrado na origem de raio 2, e verificando $|g(z)| < 1$ na circunferência unitária $|z| = 1$. Mostre que g tem um único ponto fixo z_0 (i.e., $g(z_0) = z_0$) no disco unitário $|z| < 1$.

Resolução: É imediato que uma função $g(z)$ tem um ponto fixo numa região se e só se a função $h(z) := g(z) - z$ tem um zero nessa mesma região. Uma vez que

$$|h(z) + z| = |g(z)| < 1 = |z|$$

para qualquer z na circunferência unitária e que, tanto $h(z)$ como $f(z) := z$ são funções holomorfas no disco fechado $|z| \leq 1$, podemos aplicar o teorema de Rouché para concluir que $h(z)$ tem o mesmo número de zeros que $f(z)$ em $|z| < 1$. Este número é 1, uma vez que f tem um único zero em $\mathbb{C}$ em $z = 0$.

- Considere a seguinte sucessão de polinômios $f_n(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!}$. Mostre que para todo o $R > 0$ existe um natural N tal que $f_n(z)$ para $n > N$ não tem zeros em $\mathbb{D}(0, R)$. (Sugestão: prove que há convergência uniforme em compactos e use o teorema de Hurwitz).

Resolução: Pela analiticidade de funções definidas por séries, sabemos que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ é uma função holomorfa em todo o $\mathbb{C}$, dado que o raio de convergência desta série é ∞ . Mas o mesmo resultado garante que a convergência da série é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, o que se traduz na convergência uniforme

em compactos da sucessão das suas somas parciais, que é precisamente $f_n(z)$. Assim, sendo C_R a fronteira do disco $\mathbb{D}(0, R)$, o teorema de Hurwitz garante a existência de um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ as funções $f_n(z)$ têm o mesmo número de zeros (contados com multiplicidades) que a função e^z , ou seja, nenhum.

5. Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e no ponto ∞ . (a) Prove que f é uma função racional, isto é que pode ser escrita na forma $f(z) = p(z)/q(z)$ onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinómios. (b) Mostre que a diferença entre o grau de p e o de q é precisamente igual a $-\text{ord}_\infty f$.

Resolução: (a) Sejam $z_1, \dots, z_n$ os pólos finitos de f (em número finito pois ∞ é polo de f e os pólos de uma função meromorfa são pontos isolados). Seja

$$f(z) = \frac{b_{j,n_j}}{(z - z_j)^{n_j}} + \dots + \frac{b_{j,1}}{z - z_j} + a_{j,0} + \dots + a_{j,k}(z - z_j)^k + \dots$$

a expansão em série de Laurent de f em torno de z_j , $j = 1, \dots, n$. Se designarmos por $p_j(z)$ a parte principal de f no ponto z_j , isto é:

$$p_j(z) = \frac{b_{j,n_j}}{(z - z_j)^{n_j}} + \dots + \frac{b_{j,1}}{z - z_j},$$

então a função $h(z) := f(z) - (p_1(z) + \dots + p_n(z))$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ (i.e., inteira). Para mostrar isto, basta verificar que a sua expansão em série de $h(z)$ em torno de qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ só tem potências positivas (e o termo constante). Por outro lado, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)|$, pelo que h é meromorfa no ponto infinito. Assim, $h(z)$ é um polinómio (se a sua série tivesse infinitos termos não nulos, h teria uma singularidade essencial no infinito). Finalmente, pela fórmula acima, $f(z)$ é uma soma de um polinómio $h(z)$ com n funções racionais $p_j(z)$, sendo por isso uma função racional.

(b) Seja $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ e sejam n e m os graus de $p(z) = a(z - z_1) \dots (z - z_n)$ e $q(z) = b(z - w_1) \dots (z - w_m)$, onde podemos assumir que nenhum dos zeros de $p(z)$ é zero de $q(z)$ e vice-versa. A ordem de $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ no infinito é igual à ordem de

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{p\left(\frac{1}{z}\right)}{q\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a\left(\frac{1}{z} - z_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - z_n\right)}{b\left(\frac{1}{z} - w_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - w_m\right)} = \frac{a}{b} z^{m-n} \frac{(1 - z z_1) \dots (1 - z z_n)}{(1 - z w_1) \dots (1 - z w_m)},$$

que é $m - n$, dado que $\frac{a}{b}$ e o limite da fracção á direita quando $z \rightarrow 0$ são não nulos.