

Complementos de Análise Complexa

Primeiro Teste, 20/11/2007

20 de Novembro de 2007

Duração: 90 minutos

(Uma das perguntas 3,4,5 é opcional)

1. Seja $T(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ uma transformação de Möbius, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Quais os valores que α não pode tomar? Mostre que T preserva a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e que, para $|\alpha| < 1$, $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
2. Seja Ω uma região no plano complexo, $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ uma função holomorfa em Ω e considere a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : \pi_1(\Omega, z_0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ [\gamma] &\mapsto \int_{\gamma} f(z) dz.\end{aligned}$$

- (a) Mostre que ψ está bem definida, é um homomorfismo de grupos e a sua imagem é um subgrupo abeliano de $(\mathbb{C}, +)$. (b) Pode, para certo $f(z)$, a imagem ser um subconjunto denso de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$? Justifique.
3. Seja $g(z)$ holomorfa no disco aberto centrado na origem de raio 2, e verificando $|g(z)| < 1$ na circunferência unitária $|z| = 1$. Mostre que g tem um único ponto fixo z_0 (i.e, $g(z_0) = z_0$) no disco unitário $|z| < 1$.
 4. Considere a seguinte sucessão de polinómios $f_n(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!}$. Mostre que para todo o $R > 0$ existe um natural N tal que $f_n(z)$ para $n > N$ não tem zeros em $\mathbb{D}(0, R)$. (Sugestão: prove que há convergência uniforme em compactos e use o teorema de Hurwitz).
 5. Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e no ponto ∞ . (a) Prove que f é uma função racional, isto é que pode ser escrita na forma $f(z) = p(z)/q(z)$ onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinómios. (b) Mostre que a diferença entre o grau de p e o de q é precisamente igual a $-\text{ord}_{\infty} f$.