

Complementos de Análise Complexa

Ficha 8

1. Determine uma transformação conforme entre o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ e o disco unitário $\mathbb{D}$.
2. Seja f uma transformação conforme do conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, com a propriedade $f(i+1) = 0$. Determine uma expressão para f . Existirá outra função com tais propriedades? Justifique.
3. Seja $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ a circunferência de raio $r > 0$ centrada na origem, e F uma função inteira que verifica $F(C_1) \subset C_2$ e $F(C_2) \subset C_4$. Prove que $F(C_{2^k}) \subset C_{2^{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Se F (restringido a $\mathbb{D}$) for uma transformação conforme de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}(2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, prove que existe $c \in \mathbb{C}$ com $|c| = 2$, tal que $F(z) = cz$.
4. Seja C um arco na circunferência unitária $|z| = 1$, e Ω uma região em $\mathbb{D}$ de tal forma que C é parte da sua fronteira. Se f é uma função holomorfa em Ω , contínua em C e tal que $|f(z)| = 1$ para $z \in C$, mostre que a expressão $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$ define uma continuação analítica de f através de C .
5. Seja f uma função contínua em $\overline{\mathbb{D}}$ e holomorfa em $\mathbb{D}$, verificando $|f(z)| = 1$ sempre que $|z| = 1$. Prove que f pode ser extendida a uma função meromorfa no plano complexo, com um número finito de pólos.
6. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω , uniformemente limitada em compactos de Ω . Mostre que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ existe para todo $z \in \Omega$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .
7. Seja $B = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1, |\operatorname{Re} z| < 1\}$. Mostre que existe uma transformação conforme entre o conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e o conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$.