

# Complementos de Análise Complexa

## Ficha 7

1. Seja  $P_r(\theta)$  o núcleo de Poisson, definido para  $0 \leq r < 1$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , através de

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Seja  $u \geq 0$  uma função harmónica em  $\mathbb{D}(0, 1)$  e contínua em  $\overline{\mathbb{D}}$ . Mostre as desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{1+r} &\leq 2\pi P_r(\theta) \leq \frac{1+r}{1-r} \\ \frac{1-r}{1+r} u(0) &\leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r} u(0). \end{aligned}$$

2. (Teorema de Harnak) Seja  $u_n$  uma sucessão de funções harmónicas no disco unitário  $\mathbb{D}$  que converge uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ . Prove que o limite é uma função harmónica.
3. Prove que uma função  $u$  é harmónica na região  $\Omega$  se e só se satisfaz a propriedade do valor médio em discos de  $\Omega$ , isto é se, para qualquer  $z \in \Omega$  e disco  $\mathbb{D}(z, r)$  centrado em  $z$  e totalmente contido em  $\Omega$ , se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(z, r)} u \, dx \, dy.$$

4. Considere a função  $f(z) = e^{2z} + e^{-2z} + 2$ . Verifique que  $f$  tem zeros simples nos pontos  $z_n = \frac{i\pi}{2}(2n+1)$ , e calcule a sua ordem. Determine a factorização de Hadamard de  $f$ .
5. Seja  $f$  uma função inteira de ordem 1 cujos zeros são simples e estão localizados nos inteiros ímpares. Supondo que  $f$  é par, e que  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$ , determine a factorização de Hadamard de  $f$ . Relacionando  $f$  com uma função conhecida mostre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{4}{(2n-1)^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

6. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções inteiras de ordem  $\rho$ . Mostre que  $fg$  e  $f+g$  são inteiras de ordem  $\leq \rho$ .
7. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções meromorfas numa região  $\Omega$ , e seja  $\Omega^* = \Omega \setminus P$  onde  $P$  é o conjunto dos pontos que são pólos de  $f$  ou de  $g$ . Mostre que  $f = g$  em  $\Omega^*$  se e só se o conjunto  $\{z \in \Omega^* : f(z) = g(z)\}$  tem um ponto de acumulação.