

Complementos de Análise Complexa

Ficha 6

7 de Novembro de 2007

1. Mostre que a função theta de Riemann, definida por

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau n^2 + 2\pi i n z}$$

é holomorfa para $z \in \mathbb{C}$ e para $\tau \in \mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$.

2. Dê um exemplo de uma função contínua $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ que não pode ser uniformemente aproximada por polinómios. Mais precisamente, se f_n for uma sucessão de polinómios na variável $z \in \overline{\mathbb{D}}$ não podemos ter $f_n \rightarrow f$ uniformemente.
3. Seja f não constante e inteira. Mostre que $f(\mathbb{C})$ é denso em $\mathbb{C}$.
4. Seja f meromorfa em $\mathbb{C}$ com $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. Mostre que f é uma função racional.
5. Seja f uma função racional. Mostre que

$$\sum_{p \in \overline{\mathbb{C}}} \text{ord}_p f = 0,$$

onde $\overline{\mathbb{C}}$ designa a esfera de Riemann.

6. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω que converge, uniformemente em subconjuntos compactos $K \subset \Omega$ para uma função não constante f . Mostre que, se cada f_n é injectivo, então f também é injectivo.
7. Mostre que qualquer função injectiva e holomorfa $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ é da forma $f(z) = az$ ou $f(z) = \frac{a}{z}$ para certo $a \in \mathbb{C}^*$.