

Complementos de Análise Complexa

Ficha 5

5 de Novembro de 2007

1. Prove que a homotopia (de extremos fixos) é uma relação de equivalência. Mostre que se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (extremos fixos) então $\gamma_1 * \gamma_2^{-1} \sim \epsilon_{z_0}$ (livremente) onde ϵ_{z_0} é o caminho constante baseado em z_0 .
2. Prove que o produto em $\pi_1(\Omega; z_0) = \Pi(\Omega, z_0)/\sim$ está bem definido, isto é se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ e $\gamma'_1 \sim \gamma'_2$, então $\gamma_1 * \gamma'_1 \sim \gamma_2 * \gamma'_2$. Mostre que o produto em $\pi_1(\Omega; z_0)$ verifica $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ e $[\gamma][\epsilon_{z_0}] = [\epsilon_{z_0}][\gamma] = [\gamma]$, para qualquer $\gamma \in \Pi(\Omega, z_0)$.
3. Sejam $z_0, z_1, \dots, z_n$ números complexos distintos e γ uma circunferência com $I(\gamma, z_0) = 1$, $I(\gamma, z_j) = 0$ para $j \geq 1$. Determine

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n)} dz$$

4. Seja f holomorfa no semiplano superior e na recta real. Suponha que existem constantes positivas A e c tais que $|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^c}$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Prove que, para todo $z \in \mathbb{H}$ temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

5. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e D um disco aberto cujo fecho está contido em Ω . Seja $f \in H(\Omega)$ não constante tal que $|f|$ é constante em ∂D . Mostre que f tem pelo menos um zero em D . (Sugestão: considere $g(z) = f(z) - f(z_0)$ com $z_0 \in D$).
6. Seja $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ e $R > 0$ um número real fixo. Prove que existe m tal que p_n não tem zeros no disco de raio R para todo $n \geq m$.
7. Considere a função inteira $f(z) = z^{n+1} - e^{\frac{1}{2}z-1}$, para $n \geq 1$ inteiro. Mostre que f possui $n+1$ zeros na coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$ (observe que $e^{-\frac{5}{4}} > \frac{1}{4}$) e calcule o índice em torno da origem do caminho dado por $\gamma(t) = \frac{f(e^{it})}{e^{2it}}$.