

Complementos de Análise Complexa

Ficha 4

19 de Outubro de 2007

1. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função em $\mathbb{C}$.

(a) Prove que se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, é injectiva e crescente então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [u(t, 0) + iv(t, 0)] dt.$$

(b) Prove que, se f é holomorfa em $\mathbb{C}$, as partes reais e imaginárias de $\int_{\gamma} f(z) dz$ são integrais de campos fechados em $\mathbb{R}^2$, e identifique esses campos.

2. Indique uma região maximal onde as seguintes funções têm uma primitiva e determine-a: (a) $\frac{1}{z}$; (b) $(z - 3)^{\frac{3}{2}}$; (c) $z^{\frac{1}{2}} + (z - 1)^{\frac{1}{2}}$.

3. Calcule $\int_{|z|=2} \left[z^{\frac{1}{2}} + (z - 1)^{\frac{1}{2}} \right] dz$, onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

4. Seja $f \in H(\Omega)$ satisfazendo $|f(z) - 1| < 1$. Prove que $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, para toda a curva fechada γ em Ω .

5. Seja $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ onde $h(z)$ é uma função holomorfa que não se anula numa região Ω , e γ um caminho homólogo a zero em Ω , tal que $z_0 \notin \{\gamma\}$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = mI(\gamma, z_0).$$

6. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e z_1 e z_2 dois pontos distintos de Ω . Sejam γ_1 e γ_2 os caminhos $|z - z_1| = r_1$ e $|z - z_2| = r_2$, com r_1 e r_2 suficientemente pequenos de modo a que γ_1 e γ_2 não se intersectam. Se $f \in H(\Omega \setminus \{z_1, z_2\})$, $\int_{\gamma_1} f(z) dz = a_1$ e $\int_{\gamma_2} f(z) dz = a_2$, qual é o conjunto de todos os valores de $\int_{\gamma} f(z) dz$, em que γ é qualquer curva em $\Omega \setminus \{z_1, z_2\}$?

7. Considere $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ e γ dada pela figura. Determine geometricamente $I(\gamma, z_1)$ e $I(\gamma, z_2)$. Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$.