

Complementos de Análise Complexa

Ficha 3

29 de Outubro de 2007

1. Prove que se f é holomorfa num conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, então f tem um número finito de zeros em K .
2. Sejam f e g duas funções inteiras tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$, com $|c| \leq 1$, tal que $f(z) = cg(z)$.
3. Seja f uma função inteira e sejam A e a números reais positivos tais que $|f(z)| \leq A|z|^a$, para todo o z com módulo suficientemente grande. Prove que f é um polinómio de grau $n \leq a$.
4. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $f \in H(\Omega)$. Prove que se $\Re f$ ou $\Im f$ (partes reais e imaginárias de f) têm um máximo local num ponto $z_0 \in \Omega$, então $f(z)$ é constante em Ω .
5. Seja f uma função holomorfa em $z_0 \in \mathbb{C}$. Se $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho que passa no ponto z_0 , de tal forma que $\gamma(0) = z_0$, o vector $\gamma'(0)$ é tangente à curva γ em z_0 . Diz-se que f é uma aplicação conforme no ponto z_0 se, para quaisquer par de curvas γ_1 e γ_2 deste tipo, o ângulo entre os respectivos vectores tangentes em z_0 é igual ao ângulo entre os vectores tangentes das curvas $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ no ponto $f(z_0)$. Mostre que, se $f'(z_0) \neq 0$, a aplicação $f(z)$ é conforme em z_0 . Dê um exemplo de função holomorfa que não é conforme nalgum ponto.
6. Sejam f, g funções holomorfas em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. A ordem de f em z_0 , $\text{ord}_{z_0} f$, é o menor natural m tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Mostre que $\text{ord}_{z_0}(fg) = \text{ord}_{z_0} f + \text{ord}_{z_0} g$ e que $\text{ord}_{z_0}(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_{z_0} f, \text{ord}_{z_0} g\}$. A multiplicidade de f em z_0 , $\text{mult}_{z_0} f$ é a ordem de $f(z) - f(z_0)$ em z_0 . Mostre que $\text{mult}_{z_0} f \geq 1$ e que $\text{mult}_{z_0}(g \circ f) = \text{mult}_{z_0} f \cdot \text{mult}_{f(z_0)} g$.
7. (Lema de Schwarz) Seja f uma função holomorfa no disco unitário $\mathbb{D}$, com $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$, para todo o $z \in \mathbb{D}$. Mostre que $g(z) = f(z)/z$ é uma função holomorfa em $\mathbb{D}$ e prove que $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{D}$.