

Exercícios sobre transformações de Möbius

8 de Outubro de 2007

1. Sejam $\phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ as projecções estereográficas a partir dos pontos $PN = (0, 0, 1)$ e $PS = (0, 0, -1)$ da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mostre que a aplicação $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ envia o número complexo z em $1/\bar{z}$.
2. Se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é uma transformação de Möbius diferente da identidade, e $ad - bc = 1$, mostre que $T \circ T(z) = z$, para todo z , se e só se $a = -d$.
3. Mostre que uma equação do tipo $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, com $b \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}$, e com $|b|^2 - ac > 0$ define uma circunferência em $\mathbb{C}$ se $a \neq 0$, e uma recta em $\mathbb{C}$ se $a = 0$. No caso da circunferência, determine o seu centro e raio.
4. Prove que se T é uma transformação de Möbius com dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $\frac{T(z)-\alpha}{T(z)-\beta} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta}$; Da mesma forma, se T tiver um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$, então existe $\beta \in \mathbb{C}$, tal que $\frac{1}{T(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \beta$.
5. Duas transformações de Möbius S e T dizem-se conjugadas se existir uma transformação de Möbius F tal que $S = F^{-1} \circ T \circ F$. Prove que:
 - (a) Se T tem um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$, então T é conjugada a uma translação da forma $S(z) = z + 1$.
 - (b) Se T tem dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então T é conjugada a uma função da forma $S(z) = az$. ($a \in \mathbb{C}^*$).
6. Considere a transformação de Möbius T , tal que $T(0) = 2$, $T(1) = 1$, $T(-1) = \frac{5}{3}$. Quantos pontos fixos tem T em $\overline{\mathbb{C}}$? Determine $T(C)$ onde C é a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
7. Mostre que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é um número real se e só se os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 se encontram numa circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$.