

Exercícios sobre polinómios

30 de Setembro de 2007

1. Seja A o conjunto das matrizes 2×2 da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.
 - (a) Mostre que A é um subanel de $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
 - (b) Seja φ a aplicação $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, dada por $\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Prove que φ é um isomorfismo de anéis.
2. Mostre que o corpo $\mathbb{C}$ é isomorfo ao anel dos polinómios reais quocientado pelo polinómio irredutível $x^2 + 1$, ou seja $\cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$. (Sugestão: defina uma aplicação sobrejectiva $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$, e determine o núcleo).
3. Seja $p(z)$ um polinómio de grau n .
 - (a) Mostre que $\frac{p(z)}{z^{n+1}}$ tende para 0 quando z tende para ∞ .
 - (b) Se $n > 0$, mostre que $\frac{1}{p(z)} \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$.
4. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $z \mapsto |p(z)|$ em $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ nos seguintes casos: (a) $p(z) = z - \frac{1}{2}$; (b) $p(z) = z^3 - z$.
5. Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n \geq 2$. Mostre que $p(z)$ tem n raízes distintas se e só se $p(z)$ e $p'(z)$ não têm nenhuma raiz em comum.
6. Mostre, usando a definição de derivada de uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (como o limite $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$) que a derivada de $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ é $p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$.
7. Seja S um qualquer semiplano aberto em $\mathbb{C}$, isto é, um conjunto da forma
$$S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(e^{-i\theta}(z - z_0)) > 0\}$$
para algum complexo z_0 e real θ . Interprete z_0 e θ geometricamente. Por analogia com a demonstração dada na aula, mostre que se as raízes de um polinómio $p(z)$ estão em $\overline{S}$ então as raízes de $p'(z)$ estão também em $\overline{S}$.
8. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ dois polinómios de grau ≥ 1 , cujos conjuntos de raízes R_p e R_q não se intersectam. Mostre que existem polinómios $r(z)$ e $s(z)$ tais que $r(z)p(z) + s(z)q(z) = 1$.