

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DE ANÁLISE COMPLEXA

(1) Resolva a equação $z^5 = 1 + i$.

(2) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que

$$\Re(f(x + iy)) = e^{ay} \sin x \quad \text{e} \quad f(0) = 2i,$$

sendo a uma constante real positiva. Determine $f(z)$.

(3) Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com parte imaginária dada pela função

$$v(x, y) = 2y + 3x^2y - y^3.$$

Calcule a derivada da função f no ponto $1 - i$.

(4) Seja $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)$.

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f , calculando os respectivos resíduos.

(b) Escreva um desenvolvimento de $g(z)$ em potências de $z-1$ válido na região $0 < |z-1| < 1$.

(c) Calcule os integrais

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=2} f(z) dz,$$

onde as curvas são percorridas uma vez no sentido positivo.

(5) Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{-1+\cos z}{z^2}$.

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f , calculando os respectivos resíduos.

(b) Determine o desenvolvimento de Laurent de f na região definida por $|z| > 1$.

(c) Calcule os integrais

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-\frac{i}{2}|=2} f(z) dz,$$

onde as curvas são percorridas uma vez no sentido negativo.

(6) Considere a função $f(z) = z^2 + \operatorname{sen} z$

(a) Calcule $\oint_{|z+i|=2} f(z) dz$.

(b) Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$, em que $\gamma(t) = \pi - \pi e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

(7) Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \leq 0\}$. Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \log z dz$$

onde γ é um caminho em Ω com início em 1 e fim em i .

(8) Seja $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \leq R\}$, com $R > \sqrt{2}$. Calcule os integrais

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 2} dz, \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 2} dx.$$

- (9) Seja γ_R a curva fechada que limita a região $\Omega_R = \{\rho e^{i\theta} : \rho \in [0, R], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$, onde $R > 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule os integrais

$$\oint \frac{dz}{1+z^4}, \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

- (10) Aplique convenientemente o teorema dos resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+2\sin(\theta))^2} d\theta = \frac{6\pi}{5^{3/2}}.$$

- (11) Considere a função $f(z) = 2 - z^2 - 2\cos z$. Justifique que $f(z)$ admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z = 0$ e determine a região de convergência. Diga qual o tipo de singularidade que $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ tem na origem e calcule o respectivo resíduo.
- (12) Mostre que a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ define uma função analítica na região $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$ (Recorde que se define $n^z = e^{z \log n}$).