

ANÁLISE COMPLEXA

2º EXAME 2000/01

1. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação de Möbius e $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
 - a) Supondo que $c = 0$, $a \neq d$, determine os pontos fixos de T .
 - b) Supondo que M tem dois valores próprios distintos, mostre que T tem dois pontos fixos distintos.
2. Considere os polinómios $p_n(z) = 1 + z^n + z^{n+1}$, com $n \geq 1$.
 - a) Mostre que todos os zeros de $p_n(z)$ estão na coroa $K = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$.
 - b) Calcule o integral $\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$, onde $h(z) = \frac{p_n(z)}{z^n}$ e γ é o caminho parametrizado por $\gamma(t) = 2e^{-it}$, com $t \in [0, 4\pi]$.
3. Seja f uma função inteira de ordem finita ρ , cujos zeros são simples e estão localizados nos pontos $z_n = ni^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - a) Mostre que $\rho \geq 1$.
 - b) Supondo que $\rho = 1$ que f é ímpar e que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = i$, determine a factorização de Hadamard de f .
4. a) Seja δ_ε a semicircunferência parametrizada por $\delta_\varepsilon = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Mostre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$
 - b) Usando o resultado anterior e uma curva adequada no plano complexo prove que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
5. Seja T uma transformação conforme $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
 - a) Mostre que T é a restrição a $\mathbb{D}$ de uma transformação de Möbius.
 - b) Nas condições $T(0) = i$, $T'(0) > 0$, mostre que T é única e determine-a.
6. Seja $\tau \in \mathbb{H}$, Λ o reticulado gerado por 1 e τ , e $\theta(z)$ uma função inteira ímpar que verifica

$$\begin{cases} \theta(z+1) = \theta(z) \\ \theta(z+\tau) = -e^{-2\pi iz - \pi i \tau} \theta(z), \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
 - a) Mostre que $\frac{d}{dz} \left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right)$ é uma função elíptica em relação a Λ .
 - b) Mostre que $\theta(z)$ tem zeros simples nos pontos de Λ , que estes são os únicos zeros de $\theta(z)$, e que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right) + c$, onde $\wp(z)$ é a função $\wp$ de Weierstrass relativa ao reticulado Λ .