

## ANÁLISE COMPLEXA

2º EXAME 99/00

1. Seja  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  uma matriz de determinante 1, de tal forma que  $T_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  é uma transformação de Möbius não trivial tendo  $\infty$  como ponto fixo. Quais os valores que  $c$  pode tomar? Prove que  $M$  é diagonalizável se e só se  $T_M$  tem outro ponto fixo (diferente de  $\infty$ ).
2. Calcule o integral  $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$ .
3. Considere a família de polinómios  $p_n(z) = 1 + z^n + z^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Calcule o integral  $\oint_{|z|=2} \frac{nz^{n-1} + (n+1)z^n}{1+z^n+z^{n+1}} dz$ . Mostre que  $p_n(1/z)$  não tem zeros em  $\{z : |z| > 2\}$ .
4. Seja  $\Omega$  uma região em  $\mathbb{C}$  cujo grupo fundamental é abeliano mas não trivial. Prove que existe um caminho  $\gamma$  e uma função  $f$ , holomorfa em  $\Omega$ , tal que  $\int_\gamma f(z) dz \neq 0$ . (Sugestão: use o teorema de Cauchy global).
5. Seja  $h$  uma função inteira, de ordem finita  $\rho$  tendo somente zeros simples nos pontos  $z_n = (-1)^n \sqrt{n(n+1)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Prove que  $\rho \geq 1$ . Supondo que  $\rho = 1$ ,  $h$  é par e que  $\lim_{z \rightarrow \sqrt{2}} \frac{h(z)}{1 - \frac{z^2}{2}} = 2$ , determine uma factorização de  $h$ .
6. Seja  $\Lambda$  um reticulado maximal em  $\mathbb{C}$ , e seja  $\Lambda/2 = \{z \in \mathbb{C} : 2z \in \Lambda\}$ . A ordem de uma função elíptica  $f$  em relação a  $\Lambda$ , é o número de zeros, contados com a respectiva multiplicidade, num polígono fundamental de  $\Lambda$ .
  - a) Prove que existem funções elípticas relativas a  $\Lambda$  com qualquer ordem  $\geq 2$ .
  - b) Mostre que se  $f(z)$  tem zeros simples em  $(\Lambda/2) \setminus \Lambda$  e polos triplos em  $\Lambda$  então  $f(z)$  é a derivada da função  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$ , a menos de constante multiplicativa.
7. Seja  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  uma sucessão de funções holomorfas e não nulas numa região  $\Omega$ , convergindo para  $f(z)$  uniformemente em cada compacto de  $\Omega$ . Prove que, ou  $f \equiv 0$ , ou  $f$  não tem zeros em  $\Omega$ .