

ANÁLISE COMPLEXA

1º EXAME 00/01

1. Seja $T(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ uma transformação de Möbius, com $a \in \mathbb{C}$ e $b = \operatorname{Im} a \neq 0$.
 - a) Mostre que T tem um só ponto fixo em $\overline{\mathbb{C}}$ e determine-o.
 - b) Se C e $\mathbb{D}$ designam respectivamente a circunferência e o disco unitário, mostre que $T(C) = C$ e $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
2. Considere o polinómio $p(z) = az^3 - 3z + b$, com $0 < b < 1 \leq a < 2$.
 - a) Mostre que $p(z)$ tem na coroa $K = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ dois zeros simples ou um zero duplo.
 - b) Determine, justificando, o índice em torno da origem do caminho parametrizado por $\gamma(t) = \frac{f(e^{it})}{e^{3it}}$, com $t \in [0, 4\pi]$.
3. Seja f uma função inteira de ordem finita ρ , cujos zeros são simples e estão localizados nos inteiros ímpares.
 - a) Mostre que $\rho \geq 1$.
 - b) Supondo que $\rho = 1$, que f é par, e que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, determine a factorização de Hadamard de f .
 - c) Relacionando f com uma função sua conhecida mostre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{3}.$$
4. Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ uma função holomorfa do disco unitário nele próprio. Prove que para todo $a \in \mathbb{D}$ se tem

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

(Sugestão: Considere uma função $F = \phi_1 \circ f \circ \phi_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, onde ϕ_1, ϕ_2 são automorfismos do disco escolhidos de modo a ter-se $F(0) = 0$, e aplique o lema de Schwarz.)

5. Usando o teorema dos resíduos e uma curva adequada no plano complexo calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} dx.$$

6. Seja τ um número complexo com parte imaginária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n z} e^{\pi i n(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em $\mathbb{C}$.
 - a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)} \vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi i z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

- b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do reticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em $\mathbb{C}$.