

ANÁLISE COMPLEXA

1º EXAME 99/00

1. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação de Möbius que preserva a recta real, e a sua orientação, com $ad - bc = 1$. Mostre que T tem dois pontos fixos em $\mathbb{R}$ se e só se $|a + d| > 2$.
2. Calcule o integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1}{2} + \cos^2 \theta}$.
3. Seja $p(z) = z^4 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6}$. Prove que p tem 3 zeros em $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{2}\}$ e calcule o índice da curva $\gamma(t) = \frac{p(\frac{1}{2}e^{it})}{\frac{1}{16}e^{4it}}$, $t \in [0, 2\pi]$, em torno da origem.
4. Seja $\Pi(\mathbb{C}^*)$ o grupo das classes de homotopia de caminhos fechados em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que começam e acabam em 1, com a operação de composição. Prove que a função $\varphi : \Pi(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{Z}$, dada por $\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$ está bem definida e que é um homomorfismo de grupos sobrejectivo.
5. Seja h uma função inteira, de ordem finita ρ , cuja sucessão de zeros, de acordo com as respectivas multiplicidades, é dada por $z_n = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$ (isto é, 0 é zero simples e $n^2 > 0$ é duplo). Prove que $\rho \geq \frac{1}{2}$. Supondo $\rho = 1$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{z} = i$, $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{h(z)}{(z-1)^2} = 2e$, determine uma factorização de h .
6. Seja T o interior do triângulo de vértices $0, 1, i \in \mathbb{C}$, e f_1, f_2 duas transformações conformes entre T e $\mathbb{H} = \{z : \text{Im} z > 0\}$.
 - (a) Prove que $f_1 \circ f_2^{-1}$ é uma transformação de Möbius, e indique a sua forma mais geral.
 - (b) Prove que é possível estender f_1 a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e que essa função resultante é uma função elíptica.
7. Prove o teorema de Mittag-Leffler: Se $\{z_n\}_{n \geq 1}$ é um conjunto discreto de números complexos e $p_n(z)$ uma sequência de polinómios sem termo constante, então existe uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, cujos únicos polos estão em $\{z_n\}$ e cuja parte principal em z_n é $p_n(\frac{1}{z-z_n})$.