12ª **Aula Prática**

1) Determine o interior do intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^n}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n!)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (ax)^{3n}, \quad a \in \mathbb{R}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+\pi)^{2n}}{3^n-1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n!-9}$

2) Determine as séries de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:

a) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)^2, \quad x_0 = 0$

b) $g(x) = x\log(1-x^2), \quad x_0 = 0$

c) $h(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = -3.$

d) $j(x) = e^{5x} + \dfrac{3}{3+5x}, \quad x_0 = 0$

e) $k(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}, \quad x_0 = -1$

f) $l(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt, \quad x_0 = 0.$

3) Usando a série geométrica, calcule a soma das seguintes séries em termos de funções racionais e funções elementares, e diga em que intervalos são convergentes

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

4) Usando uma série de Taylor adequada, calcule as derivadas $f^{(n)}(x_0)$, para as seguintes funções $f(x)$, no ponto x_0 e de ordem n

a) $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$, $\quad n = 18$.

b) $f(x) = x^3 e^{-2x}$, $x_0 = 0$, $\quad n = 13$.

c) $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$ $x_0 = 3$, $\quad n = 27$.

5) Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente em $\mathbb{R}$, verificando $f(0) = 3$ e $f'(x) = f(x) + x$. Determine os coeficientes a_n e escreva f em termos de funções elementares.

13ª Aula Prática

1) Determine as séries de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{2}{4+x^2}, \quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x_0 = 0$

c) $h(x) = e^x, \quad x_0 = 3$

d) $j(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad x_0 = 1.$

2) Determine a fórmula de Taylor de ordem n das seguintes funções, em torno dos pontos indicados

a) $\mathrm{tg}x, \quad x = 0, \quad n = 2$

b) $\frac{1}{e^x}, \quad x = 1, \quad n = 2$

c) $-2x^4 - 8x^3 - 11x^2 - 6x + 2, \quad x = -1, \quad n = 427$

3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = 2e^{-x}\,\mathrm{ch}\,x - 1 + \frac{1}{2}x$$

a) Escreva o polinómio de Taylor de segunda ordem da função f relativo ao ponto 1.

b) Verifique se a função f tem extremos locais em $\mathbb{R}^+$.

4) Determine os pontos de estacionaridade das seguintes funções e calcule as matrizes Hessianas nesses pontos

a) $f(x,y) = 2x^2 + xy - 2y^2,$

b) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + yz + xz,$

c) $h(x,y) = y\ \mathrm{sen}x$

5) Mostre que $(0,0,0)$ é ponto de estacionaridade de

$$f(x,y,z) = x^2 - xyz + z^2 + y\,\mathrm{sen}\,y\ .$$

e determine a sua natureza.

6) Determine e classifique todos os pontos de estacionaridade da seguinte função

$$f(x,y) = \mathrm{sen}x\ \cosh y$$

14ª Aula Prática

1) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xye^{x-y} \ .$$

2) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Estude a existência de máximos ou mínimos absolutos de f em $\mathbb{R}^2$.

3) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

Mostre que f não tem extremos absolutos em $\mathbb{R}^2$, mas tem um máximo no primeiro quadrante. Determine o correspondente valor máximo de f.

4) Considere a função

$$f(x, y, z) = xy + yz + 2xz.$$

Determine e classifique os pontos de estacionaridade de f.

5) Determine os extremos relativos da função

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4.$$

Determine os extremos absolutos da restrição de f ao quadrado definido por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, \quad |y| \leq 2\}$$

e calcule os respectivos valores de f.

6) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2)\text{sen}z.$$

Estude a existência de extremos absolutos da restrição de f ao cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$