1ª Aula Prática

Determine primitivas das seguintes funções (em algum intervalo apropriado)

1) a) x^5

b) $x + \sqrt{x}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}}{4}$

d) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$

e) $(x^2+1)^3$

f) 2^x

2) a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

d) $\dfrac{1}{5+x^2}$

e) e^{x+3}

f) $\operatorname{tg}^2 x$

3) a) $\operatorname{sen} 2x$

b) e^{5x}

c) $x \operatorname{sen} x^2$

d) $\dfrac{x}{1+x^2}$

e) $\operatorname{tg} x$

f) $\operatorname{cotg} x$

g) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 3x}$

2ª Aula Prática

Para os exercícios 1 a 5, determine primitivas das funções indicadas (em algum intervalo apropriado)

1) a) $\dfrac{1}{3x-7}$

b) $\operatorname{tg} 2x$

c) $\operatorname{cotg}(5x-7)$

d) $\operatorname{tg} x \sec^2 x$

e) $\cos^3 x \operatorname{sen} x$

f) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $\dfrac{e^x}{2+e^x}$

2) a) $\dfrac{x}{1+x^2}$

b) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$

c) $\operatorname{sh}(2x+1)\operatorname{ch}(2x+1)$

d) $3^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x$

e) $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

f) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

g) $\operatorname{tg}^3 x$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) a) $\dfrac{1}{x-5}$

b) $\dfrac{3}{(x+2)^2}$

c) $\dfrac{1}{x^2+4}$

d) $\dfrac{x}{x^2+4}$

e) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

f) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$

g) $\dfrac{1}{x^2-1}$

h) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$

i) $\dfrac{x^4}{1-x}$

4) a) $\operatorname{sen}^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $\operatorname{cotg}^2 x$

d) $\sec x$

e) $\operatorname{cosec} x$

f) $\operatorname{sen}^3 x$

g) $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x$

h) $\operatorname{tg}^3 x$

5) a) xe^x

b) $\log x$

c) $e^x \operatorname{sen} x$

d) $x^2 \operatorname{sen} x$

e) $\operatorname{arctg} x$

f) $\cos(\log x)$

6) Determine uma primitiva da função

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

(i) recorrendo à substituição $x = \operatorname{tg} t$;

(ii) recorrendo à substituição $x = \operatorname{sh} t$.

3ª Aula Prática

1) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t+e^t}dt$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 u du$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \operatorname{sen}^7 x dx$

2) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$ (Sugestão: substituição $x = 1/t$)

c) $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ($x = \operatorname{sen}^2 t$)

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}dx$

3) Calcule as somas de Riemann para as seguintes funções e decomposições.

(i) $f(x) = 1-x, \quad x \in [0,1], \quad d = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

(ii) $f(x) = 1-x, \quad x \in [0,2], \quad d = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \frac{36}{25}], \quad d = \{0, \frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \frac{9}{25}, \frac{16}{25}, 1, \frac{36}{25}\}$

(iv) $f(x) = \cos x, \quad x \in [0,\pi], \quad d = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

4) Seja $d_n = \{x_0, c_1, x_1, \ldots, c_n, x_n\}$ uma decomposição do intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$ (i.e, $x_k = \frac{k}{n}$) e em que c_k é o ponto médio do subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Calcule $S_{d_n}(f)$ para $f(x) = -3x$ e $\lim_{n\to\infty} S_{d_n}(f)$ e compare com $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Repita o exercício usando $c_k = x_k$ e compare os resultados.

5) Determine uma primitiva da função definida (em algum intervalo apropriado) pela expressão:

a) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$

b) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$

c) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

d) $\dfrac{1}{x^4-x^3-x+1}$

e) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

6) Calcule uma primitiva de $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$.

4ª Aula Prática

1) Calcule o integral: $\displaystyle\int_e^{e^2} x \log x \, dx$

2) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \operatorname{sen}^2 t \, dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \log(1+t^2) \, dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2+1} \, dt$

3) Dada uma função contínua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t) \, dt$$

é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

4) Mostre que existe uma (e uma só) função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

5) Determine a área da região compreendida entre o eixo dos xx e o gráfico da função

$$f(x) = (x+2)^{-2} \ , \ x \in [0,2] \ .$$

6) Determine a área delimitada pelas curvas

$$y = x \ , \ y = \operatorname{sen} x \ , \ x = \pi/2 \ .$$

5ª Aula Prática

1) Determine a área do conjunto de todos os pontos (x, y) que verificam as condições:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 10 \\ |x| + |y| \geq 4 \end{cases}$$

2) Calcule a área e o comprimento do bordo da região plana delimitada pelas linhas de equações $y = x + 1$ e $y = (x - 1)^2$.

3) Calcule a área da região delimitada pelo gráfico de $y = \log x$ e pela recta que o intersecta nos pontos de abcissa 1 e e. Calcule o comprimento da linha que delimita esta região.

4) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$$
$$g(x) = -x^2 + 2x$$

5) Calcule a área da região delimitada pelas curvas de equação $x = 3 - y^2$ e $x = y + 1$.

6) Calcule o volume do elipsoide gerado pela rotação, em torno

da recta $y = 0$, da região do plano delimitada pela elipse de equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ ,$$

onde a e b são maiores que zero.

7) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo indicado, da região do plano delimitada pelas curvas dadas.

a) $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (só no primeiro quadrante); eixo dos yy

b) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 1$; eixo dos xx

c) $y = x^2$, $x = y^2$; eixo dos xx