Fichas de Exercícios de

Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A – 2º Semestre de 2014/2015

Prof. Responsável: Catarina C. Carvalho

0 Índice

Parte I

Enunciados

1 NÚMEROS REAIS E SUCESSÕES

1.1 Propriedades algébricas

1. Simplifique as seguintes expressões (definidas nos respectivos domínios):

a) $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}$,

b) $\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}$,

c) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+x}$,

d) $\sqrt{x^2}$,

e) $\left(\sqrt{x}\right)^2$,

f) $4^x \frac{4}{2^x}$,

g) $2^{x^2}\,(2^x)^2$,

h) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$,

i) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}$,

j) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,

k) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2)$,

l) $\ln(2x^2+2x^{-2}) + \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{2}\right)$.

2. Escreva as expressões seguintes sem usar módulos:

(a) $x + |x-1|$,

(b) $|x^2-4|$,

(c) $|2x + |x-3| + |3-x||$.

3. Resolva as seguintes equações e inequações:

a) $(x^2-3x+2)(x-1) \geq 0$,

b) $x \leq 2 - x^2$,

c) $x^2 \leq 2 - x^4$,

d) $x^3 + x \leq 2x^2$,

e) $\sqrt[3]{x^2+2x} = 2$,

f) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$,

g) $\frac{x-1}{x^2-1} \leq 1$,

h) $x = \frac{1}{x}$,

i) $x < \frac{1}{x}$,

j) $x < |x|$,

k) $|x| \geq \frac{x}{2} + 1$,

l) $|x| \leq |x-2|$,

m) $|x^2 - 2| \leq 2$,

n) $\frac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

o) $e^{x^3} < 1$,

p) $e^{-2x} - 2e^{-x} \leq -1$,

q) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

r) $\ln(x^2 - 3) \geq 0$.

4. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como intervalos ou reuniões de intervalos:

a) $\left\{x : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}$,

b) $\left\{x : \frac{x^4-1}{x^3} \leq x\right\}$,

c) $\{x : |3x-4| \geq x^2\}$,

d) $\{x : |x-1|(x^2-4) \geq 0\}$,

e) $\{x : (|x|-1)(x^2-4) \leq 0\}$,

f) $\{x : |x^2-1| \leq |x+1|\}$,

g) $\{x : x^2 - |x| - 2 \leq 0\}$,

h) $\left\{x : \frac{x}{|x|-1} \geq 0\right\}$,

i) $\left\{x : \frac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,

5. Prove que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

(a) Desigualdade Triangular: $|x+y| \leq |x| + |y|$

(b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

6. (a) Escreva com quantificadores:

i. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a equação $a + x^2 = 0$ tem solução.

ii. Existe um número real maior do que todos os outros.

iii. Se a distância de x a 1 é maior do que 1 então a distância de x a 0 é maior do que 2.

iv. Para $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$, $\dfrac{x}{y} > 1$ se, e só se, $x > y$.

(b) As afirmações são verdadeiras?

(c) Escreva a negação das afirmações acima (com e sem quantificadores).

7. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

a) $\{1\} \subset \{1, \{2,3\}\}$

b) $\{1\} \in \{1, \{2,3\}\}$

c) $2 \in \{1, \{2,3\}\}$

d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$

e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x+1\}$

f) $\emptyset \in \{0\}$

g) $\emptyset \subset \{0\}$

h) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 0 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} > 0$

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} < 1$

j) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; y^{-1} < x^{-1}$

k) $\forall_{x\neq 0}\, x^2 > 0$

l) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$

m) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y < 0 \;\Rightarrow\; x^2 > y^2$

n) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \sqrt{x^2} = x$.

8. Indique o maior $\varepsilon > 0$ tal que A contem uma vizinhança-ε de x_0:

   (a) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{2}$;
   (b) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{3}$;
   (c) $A = [-20, +\infty[,\ x_0 = 20$;
   (d) $A = [-2,3] \cup]4, +\infty[,\ x_0 = \frac{2}{3}$.

1.2 Método de Indução Matemática

1. (Ex. 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.[1]
   b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.
   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.
   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   c) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.
   d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   f) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.
   c) $7^n - 1$ é múltiplo[2] de 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   d) $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par", $n \in \mathbb{N}$.

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
   b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?
   c) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é ímpar.

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Ver exercicios seguintes.
[2] Um número é múltiplo de 6 sse é da forma $6k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

5. Prove por indução matemática que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$,

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

(Sugestão: use a Desigualdade Triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$.)

6. Demonstre a desigualdade de Bernoulli:
Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Símbolo de Somatório, definições por recorrência

Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o símbolo de somatório $\sum_{k=1}^{n} a_k$ define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \text{ se } n = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \text{ se } n > 1\,.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

7. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

$$\text{(a)} \sum_{i=1}^{8}(2i - 3)\,; \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{7}(k - 4)^2\,; \qquad \text{(c)} \sum_{j=1}^{4} j(j + 1)(j + 2)\,; \qquad \text{(d)} \sum_{i=1}^{4} 6\,;$$

$$\text{(e)} \sum_{j=1}^{3} j^{2j}\,; \qquad \text{(f)} \sum_{k=1}^{7}(-1)^k(2k - 3)\,; \qquad \text{(g)} \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n + 1)}\,.$$

8. Demonstre as seguintes propriedades do somatório:
   (a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);
   (b) $\sum_{k=1}^{n}(c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);
   (c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).
   (d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

9. Utilizando os resultados do Exercício 1 e 2 e as propriedades anteriores do somatório, calcule:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{18}(k + 1)\,; \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{20}(2k - 1)^2\,; \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{15}(k - 3)^3\,;$$

$$\text{(d)} \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k + 1} - \frac{1}{k}\right)\,; \qquad \text{(e)} \sum_{k=1}^{20}\left(3^k - 3^{k+2}\right)\,.$$

10. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

   (a) usando indução.

   (b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do somatório.

11. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} .$$

12. Mostre que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

   (a) usando indução.

   (b) aplicando as propriedades do Exercício 8 a $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k$.

A que é igual a soma quando $r = 1$? [3]

13. O símbolo $n!$, designado por n-**factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Dados inteiros $0 \leq k \leq n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

   (a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

   Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

[3] Por definição, $r^0 = 1$.

(b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

14. Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f(n) = (2n)!$$

15. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}\,.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)\,.$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}\,.$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}\,.$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,.$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}\,.$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = (n^2+1)2^{n+1} - 2\,.$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}\,.$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}\,.$

1.3 Axioma do Supremo

1. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

2. Verifique que se x, y são números racionais, então $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.[4]

[4]Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

3. (Ex. I.3 de [1]) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um número irracional, então $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

4. (Ex. 1.2 de [2]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A \cap B = \left[-3, -\frac{4}{3}\right] \cup \{4\}$.

   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

5. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \ln x} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

6. (Ex. 1.8 de [2]) Considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\ln x} \geq 1\right\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

7. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right],$$
$$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

   b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\max A \cap B$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B \setminus C$.

8. (Exame de 2000) Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2].$$

a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

9. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

10. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1|\right\}, \qquad B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[$.

b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

11. (Teste de 12/11/2005) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

12. (Teste de 29/4/2006) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \ \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\ \cup \ \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

13. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

14. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $s = \sup A$. Se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

15. (Ex. 1.10 de [2]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

16. (Ex. I.5 de [1]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

17. (Ex. 1.12 de [2]) Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

    a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

    b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

18. (Ex. 1.14 de [2]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.

    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge\ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

1.4 Sucessões

1. Indique quais são limitadas/majoradas/minoradas e monótonas (crescentes ou decrescentes) de entre as sucessões definidas do modo seguinte, $n \in \mathbb{N}$:

    a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

    b) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

    c) $u_n = (-1)^n n^2$.

    d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

    e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$. [5]

    f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

    g) $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$.

2. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3, \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2}\,. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

[5] Pode ser útil usar o Ex. 1.2.12.

(a) $u_n = \sqrt{2^n - 1}$,

(b) $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$.

3. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = rv_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que (i) (u_n) seja monótona crescente; (ii) (u_n) seja monótona decrescente; (iii) (v_n) seja monótona crescente; (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

4. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

b) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

c) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

d) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

5. A mesma questão que a anterior para:

a) $\dfrac{n+3}{n+2} \not\to \frac{3}{2}$.

b) $1 + (-1)^n \not\to 0$.

6. Baseando-se na definição de limite, mostre que se se (u_n) é uma sucessão monótona e limitada então

(a) u_n crescente: $\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) u_n decrescente: $\lim u_n = \inf\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

7. (Exercício 1.45 de [2]) Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

8. (Exercício 1.47 de [2]) Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

9. (Exercício 1.34 de [2]) Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n + 1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

10. (Exercício 1.40 de [2]) Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

11. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{1}{n}\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

b) $\frac{1}{n}\left(2n + \sqrt{n}\right)$

c) $\frac{(-1)^n}{n!}$

d) $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

e) $\frac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$

f) $(1+(-1)^n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

g) $\frac{n(1+(-1)^n)}{2}$

h) $\frac{(-1)^n}{a^n}$, com $a > 1$

i) $\frac{\mathrm{sen}(n!)}{(2n)!}$

j) $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n$

12. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{(2n+1)^3 + n}{n^3+1}$,

b) $\frac{(2n+1)^3 + n^2}{(n+1)^2(n+2)}$,

c) $\frac{(n+1)^2 + 2n^4}{(n+1)^4 + 2n^2}$,

d) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$,

e) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$,

f) $\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

g) $\dfrac{n+1}{n!}$,

h) $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

i) $\dfrac{1+2^{-n}+3^{-n}}{2+3^{-n}+4^{-n}}$

j) $\dfrac{n^n}{n^n+1}$,

k) $\dfrac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

l) $\dfrac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a > 1$,

m) $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{n^2-1}$

n) $\dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$

13. (Exercício 1.36 de [2]) Indique, justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é
    a) convergente;
    b) divergente, mas limitada.

14. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

15. Sejam A e B os conjuntos $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:
    a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.
    b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.
    c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

16. Considere o seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$ (Ex.1.3.9)

$$A = \left\{x \,:\, |x^2-2| \leq 2x+1\right\} = \left[-1+\sqrt{2},\, 3\right],$$

    Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:
    (i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.
    (ii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1}a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Sucessões por recorrência

17. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).

b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

18. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

19. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

20. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

21. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{3} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

22. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$.

(Sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

23. (Exercício II.1g) de [1]) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

    b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
    (Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n + \sqrt{2+u_n}}$.)

    c) Justifique que (u_n) é convergente.

    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

24. (Exercício 8.13 de [1]) Seja (a_n) a sucessão definida por recorrência por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$.

    a) Verifique que $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(a_n - \sqrt{3})}{3+a_n}$ e prove por indução que $a_n > \sqrt{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

    b) Prove que (a_n) é decrescente.

    c) Justifique que (a_n) é convergente.

    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (a_n).

Limite em $\overline{\mathbb{R}}$

25. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

    a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

    b) $\dfrac{n^2 + 1}{n} \to +\infty$.

26. a) Mostre que:

    i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

    ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

    b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

27. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

    a) $\dfrac{n^n}{1000^n}$,

    b) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

    c) $n^{n+1} - n^n$

    d) $3^n - (2n)!$

    e) $(n! - n^{1000})^n$

    f) $\sqrt[n]{\dfrac{n+2}{n+1}}$

g) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$

h) $\sqrt[n]{\dfrac{n}{n^2+1}}$

i) $\sqrt[n]{3^n+2}$

j) $\sqrt[n]{n!}$,

k) $\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n$

l) $\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$

m) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

28. (Exercício II.5 de [1]) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\dfrac{2n+3}{3n-1}$,

b) $\dfrac{n^2-1}{n^4+3}$,

c) $\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$,

d) $\dfrac{n^3+1}{n^2+2n-1}$,

e) $\dfrac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$,

f) $\dfrac{n^p}{n!}$ $(p \in \mathbb{N})$,

g) $\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$,

h) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$,

i) $\dfrac{3^n}{n^2}$,

j) $\sqrt[n]{\dfrac{n^2+n-1}{n+3}}$,

k) $\sqrt[n]{2^n+1}$,

l) $\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$,

m) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$,

n) $\left(1-\dfrac{1}{n!}\right)^{n!}$,

o) $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

29. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

a) $\lim \dfrac{n!}{n^{1000}}$,

b) $\lim \dfrac{(2n)!+2}{(3n)!+3}$,

c) $\lim \dfrac{(2n)!}{(2n)^n}$,

d) $\lim \dfrac{(n!)^2}{(2n)!+2}$,

e) $\lim \dfrac{2^n n!}{n^n}$,

f) $\lim \dfrac{3^n n!}{n^n}$,

g) $\lim n^{\frac{1}{n}}$,

h) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$,

i) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$,

j) $\lim \left(\dfrac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$,

k) $\lim \dfrac{2^{(n^2)}}{15^n}$,

l) $\lim \sqrt[n]{3^{n+1}n^3}$.

2 LIMITE e CONTINUIDADE

2.1 Funções elementares

1. Determine se as seguintes funções são limitadas/majoradas/minoradas, e monótonas (crescentes ou decrescentes), indicando, se for o caso, se são pares ou ímpares, nos domínios dados:

   (a) $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,;$

   (b) $\dfrac{x}{1+x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,;$

   (c) $\dfrac{1}{1+|x|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;$

   (d) $2^{-x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,;$

   (e) $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, a > 0;$

   (f) $2\,\mathrm{sen}(\pi x) - 3\cos(\pi x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$

2. Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas.

   (a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$
   (b) $p(0) = p(1) = 1\,,\ p(2) = 2$
   (c) $p(0) = p(1) = 1$
   (d) $p(0) = p(1).$

3. Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $p(x) = p(1-x)$, (b) $p(x) = p(1+x)$, (c) $p(2x) = 2p(x)$.

4. (a) Mostre que se p é um polinómio de grau $\leq n$ e a equação $p(x) = 0$ tem $n+1$ raizes diferentes, então $p(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que se p e q são polinómios de grau $\leq n$ e a equação $p(x) = q(x)$ tem $n+1$ raizes diferentes, então $p(x) = q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

d) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in \left]1-\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}\right[$.

6. Identifique arcos 0, arcos 1, arcos $\left(-\frac{1}{2}\right)$, arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right)$, arcsen $\frac{\sqrt{3}}{2}$, arcos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, arcsen $\frac{\sqrt{2}}{2}$, arctg 1, arctg$(-\sqrt{3})$.

7. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações e inequações seguintes:

a) $\arccos(3x+1) = \dfrac{2\pi}{3}$,

b) $1 - \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x^2-1) = \dfrac{1}{2}$,

c) $\dfrac{\pi}{\operatorname{arcsen}(x^2+\frac{1}{4})} = 6$,

d) $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x+\sqrt{3}) \leq \dfrac{1}{3}$,

e) $2 - \dfrac{3}{\pi}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right) < 1$,

f) $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arccos}(x^2-4) \geq 1$.

8. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\operatorname{arcos} a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

9. Deduza as seguintes identidades:

a) $\cos(\operatorname{arcos} x) = x$,

b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$,

c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

d) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcos} x) = \sqrt{1-x^2}$,

e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

10. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

a) Se f é crescente (resp. decrescente), então g é crescente (resp. decrescente).

b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

11. Esboçe os gráficos de arcsen, arcos, arctg a partir dos gráficos de sen, cos e tg.

12. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):

i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

ii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

iii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

iv) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

v) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

vi) As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por argsh e argch, isto é, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{argsh} x$, $y \in \mathbb{R}$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{argch} x$, $y \in \mathbb{R}^+$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) .$$

b) Verifique que a função sh é ímpar, e a função ch é par. Esboce os gráficos de ch e sh a partir dos gráficos de e^x e e^{-x}.

13. Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,

d) $f(x) = \ln(\ln x)$,

e) $f(x) = \ln(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

f) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$,

g) $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$

h) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,

i) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

j) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,

k) $f(x) = \ln(1 - \arccos x)$,

l) $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - \ln x)$.

14. Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt[3]{x},\ p(x) = x^2,\ q(x) = 2x+1.$$

Escreva cada uma das seguintes funções como composição de f, g, p e q:

(a) $\sqrt[3]{x^2}$,

(b) $\sqrt{2x+1}$,

(c) $\sqrt[6]{x}$,

(d) $2x^2+1$,

(e) $\sqrt[4]{x}$,

(f) $2\sqrt[3]{x}+1$,

(g) $\sqrt{2\sqrt{x}+1}$,

(h) $|x|$,

(i) $(2\sqrt[3]{x}+1)^2$.

2.2 Limite de funções

1. Mostre, recorrendo à definição de limite, que para as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = |x|$ se tem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ [1].

2. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

[1] Em particular, f e g são contínuas em qualquer $a \in \mathbb{R}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

3. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

4. Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

   (a) $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, (e) $e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, (i) $e^{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}}$, (m) $\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$,

   (b) $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$, (f) $e^{\frac{1-x^2}{x}}$, (j) $\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$, (n) $\ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)$,

   (c) $e^{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, (g) $e^{\frac{x^2}{1+x}}$, (k) $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$,

   (d) $e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}$, (h) $e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$, (l) $\ln\left(\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\right)$, (o) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)$.

5. Calcule os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

   (a) $\cos\left(\frac{x-\pi}{x^2+2}\right)$ (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4x-1}\right)$ (c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$ (d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

6. Calcule os limites quando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (a) $e^{1/x}$ (b) $\sinh(1/x)$ (c) $\cosh(1/x)$

   (d) e^{1/x^2} (e) $\sinh(1/x^2)$ (f) $\cosh(1/x^2)$

7. Seja (x_n) uma sucessão real, com $\lim x_n = 2$, $x_n \neq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Calcule, se existir, $\lim f(x_n)$ nos casos seguintes:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

   b) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

   c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, para $x \neq 2$.

8. (Exercício 3.18 de [2]) Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função f verifica a condição
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$
Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

9. (a) Dê uma interpretação geométrica da desigualdade $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. (Sug.: compare as áreas do sector circular com ângulo x e do triângulo rectângulo com lados 1 e $\operatorname{tg} x$.)

   (b) Deduza que $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus 0$, e aproveite para justificar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\ .$$

   (c) Use as desigualdades[2]
$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1,\ x > 0 \qquad 1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x},\ x < 1,$$
   para mostrar que
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

10. Use as fórmulas trigonométricas: $a, b \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,, \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\,. \end{aligned}$$
para mostrar que
$$\text{a) } \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \cos a, \qquad \text{b) } \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} = -\operatorname{sen} a.$$

11. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas por:

[2]que não precisa de demostrar

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, (b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, (c) $x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, (d) $x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Verifique se cada uma das funções acima é par ou ímpar e esboce (uma tentativa de) gráfico, a partir dos limites calculados e de propriedades das funções sen e cos.

12. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(2x+1)}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) + \ln(x)}{x - 1}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \left[x^2(1 - \cos \dfrac{1}{x})\right]$,

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$,

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$,

n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$,

o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{(x-1)^5} - 1}{(x-1)^7}$,

p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)}{\cos x}$

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{2x}$.

13. Calcule

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{arcsen} x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(2x)}{x^2}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x}$,

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1 + \arccos x)}{\arccos x}$.

2.3 Continuidade

1. (Exercício III.2 de [1]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine o seu domínio e analise a sua continuidade:

   a) $\dfrac{x+1}{x^3+x}$;

   b) $\dfrac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;

   c) $\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2+x}$;

   d) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$;

   e) $\cos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

   f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}2x-\operatorname{cotg}2x}$;

   g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

   h) $\dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

   i) $\sqrt{\ln x}$.

2. (Exercício 3.15 de [2]) Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x)=f(\operatorname{sen}x)$? Justifique.

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x)=f(\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$).

4. Mostre que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=xd(x)$, em que $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x)=1$, se $x\in\mathbb{Q}$ e $d(x)=0$, se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) é apenas contínua em $x=0$.

5. (Exercício 3.5 de [2]) Seja $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua (com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$). Supondo que existe uma sucessão convergente (x_n) de termos em $[a,b]$ tal que $\lim\phi(x_n)=0$, prove que ϕ tem pelo menos um zero em $[a,b]$.

6. (Exercício 3.14 de [2]) Sendo $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

   a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n)=n$ para todo o $n\in\mathbb{N}$.

   b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$, convergente, tal que $g(x_n)=\frac{1}{n}$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, então existe $c\in[0,1]$ tal que $g(c)=0$.

7. (Exercício 3.26 de [2]) Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}\,d(x),$$

   onde $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.

   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

   b) Estude $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

c) Em que pontos é f contínua?

8. (Exercício 3.27 de [2]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Determine K.
   b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
   c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
   d) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam?

9. (Exercício 3.34 de [2]) Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto [3].
   c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.
   d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

10. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus 1 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x-1|}$. Verique que g é prolongável por continuidade ao ponto 1 e determine o contradomínio desse seu prolongamento.

11. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0, \\[2ex] \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

em que $a \in \mathbb{R}$. Determine a por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, calcule $F(0)$.

[3] Por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D, sse a sua restrição a $]-\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ -x(x+2), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

13. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ (k-x)(x+1), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

14. (Exercício 3.29 de [2])

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

15. (Exercício 3.32 de [2]) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

16. (Exercício 3.33 de [2]) Considere as funções f e g definidas em $]0,+\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \ln\ln(1+x), \qquad g(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2}.$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

17. (Exercício 3.36 de [2]) Seja f, a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \ln\frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon,\varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$.

2.4 Propriedades de Continuidade Global

1. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(-1) = f(1) = 0$. Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in [-1,1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - x$.)

2. Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$, tal que $0 \le f(x) \le 1$ para todo o $x \in [0,1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$.

3. Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty\,.$$

   Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in]-1, 1[$ com $f(c) = c$.

4. (Exercício 3.43 de [2]) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que $\lim_{x \to a} g(x) = -\lim_{x \to b} g(x) = -\infty$. Mostre que existe uma e uma só função contínua h, definida em $[a, b]$ e tal que $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$ para $x \in]a, b[$. Determine o seu contradomínio.

5. (Exercício III.11 de [1]) Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

6. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas soluções em $\mathbb{R}$.

7. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x - \cos x = \dfrac{1}{2}$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}$.

8. Mostre que qualquer função polinomial de grau ímpar tem pelo menos um zero.

9. Seja f uma função contínua num intervalo I.

   (a) Justifique que se $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ então existe $c \in [a, b]$, $c \neq x_0$ e $f(c) = f(x_0)$.

   (b) Mostre que se f é injectiva em I então é estritamente monótona em I.

   (c) Considere $g(x) = -e^x$, para $x \leq 0$, $g(x) = e^x$ para $x > 0$. Justifique que g é injectiva em $\mathbb{R}$ e não monótona. Indique um intervalo onde g seja monótona.

10. (Exercício 3.40 de [2])

    a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1 - x^2)$ tem máximo e mínimo.

    b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

11. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:

    (a) se existe $b \in \mathbb{R}^+$ com $f(b) < f(x)$, para qualquer $x > b$, então f tem mínimo;

    (b) se existe $a \in \mathbb{R}^+$ com $f(a) > f(x)$, para qualquer $x > a$, então f tem máximo;

    (c) se existe, em $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, então f é limitada.

12. Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Mostre que f tem mínimo e que o contradomínio de f é da forma $[f(c), +\infty[$, para algum $c \in]-1, 1[$.

13. (Exercício III.15 de [1]) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

    a) Prove que f é limitada.

    b) Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

    c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função
$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

14. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

    (a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

    (b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

15. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta\,,$$
com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $f(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), tal que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$
Prove que f tem máximo.

17. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$
Prove que f tem máximo no intervalo $[0, +\infty[$.

3 CÁLCULO DIFERENCIAL

3.1 Diferenciabilidade

1. Calcule as derivadas das funções:

   a) $\dfrac{1}{x-1}$,
   b) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$,
   c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$,
   d) $x^{\frac{3}{2}}e^x$,
   e) $x^2 2^x$,
   f) $\operatorname{tg} x - x$,
   g) $\dfrac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,
   h) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,
   i) $\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}(x)}$,
   j) $x^2(1+\ln x)$,
   k) $\sinh(x)\cosh(x)$.

2. (Exercício IV.3 de [1]) Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$,
   b) $e^{-|x|}$,
   c) $\ln|x|$,
   d) $e^{x-|x|}$.

3. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

4. (Exercício 4.2 de [2]) Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

5. Calcule as constantes a e b por forma a que seja diferenciável em 0 a função f definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
Justifique a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}$, calcule a sua derivada, e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $a \leq 0$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
   a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule f' para $x \neq 0$.
   b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2}{\pi}$.
   c) Mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.
   d) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

7. (Exercício 4.9 de [2]) Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:
   a) $\ln(x \operatorname{sh} x)$,
   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$,
   c) $\dfrac{e^x}{1+x}$.

8. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista:
   a) $\operatorname{ch}(\cos x)$,
   b) $\ln(\ln x)$,
   c) $\ln(\operatorname{sen} x)$,
   d) $e^{\sqrt{x^2-1}}$,
   e) $e^{\operatorname{arctg} x}$,
   f) $e^{\ln^2 x}$,
   g) $\ln(1 + e^{x^2})$,
   h) $\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$,
   i) $\operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)$,
   j) $(e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^8$,
   k) $\operatorname{arctg}(x^4) - (\operatorname{arctg} x)^4$,
   l) $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$,
   m) $\arccos \dfrac{1}{x}$,
   n) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$
   o) $(\ln x)^x$,
   p) $x^{\operatorname{sen} 2x}$,
   q) $(\operatorname{sen} x)^x$,
   r) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$,
   s) $\operatorname{tg}(e^{\operatorname{sen} x})$.

9. Calcule as derivadas, sempre que existam, das funções seguintes:
   (a) $\ln(1 + x^2)$,
   (b) $\ln(1 + \sqrt{x})$,
   (c) $\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x)$,
   (d) $e^{\ln x}$,
   (e) $e^{1/\sqrt{x}}$,
   (f) $e^{\cos^2 x}$,
   (g) $2^{\ln x}$,
   (h) $2^{\sqrt{x}}$,
   (i) $2^{1/x}$,
   (j) $\operatorname{sen}(e^x)$,
   (k) $\operatorname{sen}(\cos^2(x))$,
   (l) $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$

(m) $\sqrt{1+x^2}$,
(n) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,
(o) $\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$,
(p) $\cos^2(\sqrt{x}) + \operatorname{sen}^2(1/x)$,
(q) $x(\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + \cos(1/x))$,
(r) $\operatorname{arcsen}(x/2)$,
(s) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$,
(t) $\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$,
(u) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,
(v) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$,
(w) $\ln\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$,
(x) x^x,
(y) $x^{\ln x}$,
(z) $x^{1/x}$.

10. Determine a derivada g' em termos de f' se:

    (a) $g(x) = f(x^2)$
    (b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2(x)) + f(\cos^2(x))$
    (c) $g(x) = f[f(x)]$
    (d) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

11. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

13. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\ln x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

14. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

15. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

    a) Justifique que f é diferenciável em $]-1, 1[$ e calcule $f'(0)$.
    b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

16. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por

$$g(x) = \operatorname{arcos}(f(x)).$$

    (a) Justifique que g é injectiva e diferenciável e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
    (b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não tem máximo nem mínimo. Será g^{-1} limitada?

17. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico são dadas por

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x$.

b) Estude sh e ch quanto à continuidade e diferenciabilidade. Calcule $(\operatorname{sh} x)'$ e $(\operatorname{ch} x)'$.

c) Estude sh e ch quanto a intervalos de monotonia e extremos e esboce os respectivos gráficos.

d) As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por argsh e argch. Calcule $(\operatorname{argsh} x)'$ e $(\operatorname{argch} x)'$ nos respectivos domínios.

3.2 Teoremas Rolle, Lagrange e Cauchy

1. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções.

2. Mostre que a equação $x^5 + 5x = 5$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

3. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5. (Exercício 4.27 de [2]) Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tem necessariamente um máximo.

b) A função f é necessariamente limitada.

c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

6. Seja $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = -2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1) = 2n-1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

7. Use o Teorema de Lagrange em intervalos adequados para provar as seguintes relações:

   (a) $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$, para $x > 1$.

   (b) $e^x > 1 + x$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

   (d) $\operatorname{arctg} x < x + \frac{\pi}{4} - 1$, para $x > 1$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

   (a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2) - f(x)] = 0$.

   (b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty}[f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.

9. Supondo que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), [1] mostre que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad \text{para quaisquer } x, y \in [a, b].$$

10. (Exercício 4.32 de [2]) Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

11. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\phi(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

12. Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\phi(n) = (-1)^n n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$ e que ϕ' não é majorada nem minorada.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\,.$$

   (a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

   (b) Mostre que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

[1] Diz-se que f é de classe C^1 em $[a, b]$ sse f é contínua em $[a, b]$, f' é contínua em $]a, b[$ e existem $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ (i.e., f' é prolongável por continuidade a $[a, b]$).

14. (a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.
    (b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

15. (Exercício 4.36 de [2]) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$. (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

16. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

17. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}$,
b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$,
c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$,
d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$,
e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$,
f) $\displaystyle\lim_{x\to1}(\ln x\cdot\ln\ln x)$,
g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}$,
h) $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1/x}}{x}$,
i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}$.
j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{10^x-5^x}{x}$,
k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$,
l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}$,
m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x^2}$,
n) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)^2\left(1-\cos\frac{1}{1-x}\right)$,
o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\left(1-\cos\frac{1}{1-x}\right)$,
p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$,
q) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x\operatorname{sen}\sqrt{x}$,

18. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}x^{\ln\ln x}$,
(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x-1}}$.
(c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}x}$,
(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$,
(e) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,
(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$
(g) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$,
(h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(x)\right)^{1/x}$,
(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{1/\ln x}$,

19. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

(a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{e^x} = 0$; (b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^p}{x} = 0$; (c) $\lim_{x\to0^+} x\,(\ln x)^p = 0$.

20. (Exercício 4.78 de [2]) Calcule $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to0} x^{\operatorname{sen}x}$.).

21. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2(x+2)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\ln(x)$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$,

(h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$,

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^x$,

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/4} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right)$,

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$,

(n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$,

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$,

(q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

22. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(e^x-1)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-e^x)^x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x-1)^x$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2+x^3)^{1/\ln x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3+x^2)^{1/\ln x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^x$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x)^{\operatorname{sen} x}$,

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$,

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\cos(1/x))^x$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$,

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\cos(1/x))^{x^2}$,

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x^2}$,

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x)\right)^{1/x}$,

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/\ln x}$,

(r) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\ln x}$,

(s) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\ln(\ln x)}$,

(t) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$,

(u) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)} - 1$,

(w) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$,

(x) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$,

(y) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$,

(z) $\lim\limits_{x\to 0^+} [(1/x)]^x$.

3.3 Estudo de funções

1. (Exercício IV.7 de [1]) Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:

   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$,
   b) $\dfrac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
   c) $|x^2 - 5x + 6|$,
   d) $x \ln x$,
   e) e^{-x^2},
   f) $\dfrac{e^x}{x}$,
   g) xe^{-x},
   h) $\operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

2. (Exercício 4.14 de [2]) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
   b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.
   c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.
   d) Estude f quanto a monotonia e extremos.
   e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f.

3. Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   a) Determine $\lim_{x\to-1^+} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule f' nos pontos onde existir.
   c) Estude f quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
   d) Determine o contradomínio de f.
   e) Mostre que não existe $f''(0)$ e que f'' muda de sinal em 0.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

5. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$.

b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de g.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

8. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{tg}(g(x)) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.
   (a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.
   (b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

10. (Exercício 4.48 de [2]) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero $V_\varepsilon(0)$, diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.
   a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é máximo ou mínimo. No caso de f ser diferenciável em 0 qual será o valor de $f'(0)$?
   b) Mostre (por meio de um exemplo) que sem a hipótese da continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

11. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas e esboce o gráfico das funções, definidas nos respectivos domínios por:

$$\text{(a) } f(x) = x + \frac{1}{x^2} \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$$\text{(c) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} \qquad \text{(d) } f(x) = \frac{|x|}{1-|x|} \qquad \text{(e) } f(x) = x^2e^{-x}$$

$$\text{(f) } f(x) = xe^{1/x} \qquad \text{(g) } f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$$

12. Mostre que a função $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ admite assintotas à direita e à esquerda e determine as suas equações. Estude f quanto à monotonia e extremos e esboce o gráfico da função.

13. Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x+1) - \ln(x-1)\,, \ \forall\, x > 1\,.$$
tendo em conta monotonia, extremos, concavidades e pontos de inflexão, assímptotas e contradomínio. Esboce o gráfico da função.

14. Faça o estudo da função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\,.$$
tendo em conta monotonia, extremos, concavidades e pontos de inflexão, assímptotas e contradomínio. Esboce o gráfico da função.

15. Determine os extremos da função $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função.

16. Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

17. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$ em $[0, 2\pi]$ (pode admitir que não existem pontos de inflexão).

18. Faça o estudo da função $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

19. Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Esboce o seu gráfico e indique o seu contradomínio.

20. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & , \ x > 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & , \ x \leq 0 . \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
   (b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

21. Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\, \ln(x), \ x > 0 .$$

   (a) Calcule $f(0)$.
   (b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
   (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

22. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0\,. \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
   (b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.
   (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

23. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right),\; x \neq 0\,.$$

   (a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
   (b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
   (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

24. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & , x \geq 0 \\ xe^{1/x} & , x < 0\,. \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
   (b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

25. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ x^2 e^x & , x < 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3.4 Fórmula de Taylor

1. a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2, com resto de Lagrange, relativa ao pontos $a = 0$ e $a = 1$, das funções seguintes:

$$e^{2x}, \qquad \ln(1+x), \qquad \cos(\pi x).$$

   b) Para $a = 0$, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de Taylor obtido no intervalo $]0,1[$.

2. (a) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

   (b) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x}$.

3. Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

$$i)\ x^2 - 4x - 9 \qquad ii)\ x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1 \qquad iii)\ x^5$$

4. Determine $e^{0.1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

5. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, usando a fórmula de MacLaurin[2] com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

6. Prove, usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| \leq 0.01, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

7. Seja f uma funçãode classe $C^4(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau 4 em a é dado por:

[2] Ou seja, a fómrula de Taylor em $a = 0$.

(a) $p_{4,0}(x) = 1 + x^4, \quad a = 0,$

(b) $p_{4,0}(x) = -1 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}, \quad a = 0,$

(c) $p_{4,1}(x) = -2 + 2x - x^2, \quad a = 1.$

Em cada caso, determine $f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e decida se f tem um ponto de extremo local em a, classificando-o

8. Seja f uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em a dado por:

   (a) $p_{5,0}(x) = 1 + x^4\,, \quad a = 0,$

   (b) $p_{5,0}(x) = x^3 - x^5\,, \quad a = 0$

   (c) $p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad a = 1.$

   Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(a)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto a.

9. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x-1)^2$, determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ de g.

10. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, recorrendo à fórmula de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição
$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$
então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 3 vezes diferenciável. Use a fórmula de Taylor para mostrar que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, se tem
$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

12. (Exercício 4.90 de [2]) Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g definida por $g(x) = xf(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

    (**Sugestão**: Escreva a fórmula de Taylor em $a = 0$ de 1ª ordem de g e use-a para determinar o sinal de $f(x) - f(0)$).

4 PRIMITIVAÇÃO

1. Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das funções:

(a) $2x^2 + 3x^3$,

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$,

(c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$,

(d) $\sqrt[3]{1-x}$,

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$,

(f) e^{1-x},

(g) $\dfrac{3}{x+3}$,

(h) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$,

(i) $e^{2x} + 2^{3x}$,

(j) $\operatorname{sh}(x/4)$

(k) $\operatorname{sen}(2x)$,

(l) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$,

(m) $\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x}$,

(n) $\dfrac{4}{1+4x^2}$,

(o) $\dfrac{2}{4+x^2}$,

(p) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$,

(q) $\operatorname{tg}^2 x$.

2. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

(a) $\dfrac{x^3}{3+x^4}$,

(b) $\dfrac{e^x}{1+2e^x}$,

(c) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

(d) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

(e) $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$,

(f) $e^x e^{e^x}$,

(g) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$,

(h) $x\cos(x^2+2)$,

(i) $e^x \operatorname{sen}(e^x)$,

(j) $x^2 \sqrt[3]{1+x^3}$,

(k) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$,

(l) $x(x^2-1)^5$,

(m) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$,

(n) $\operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh} x}$,

(o) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$,

(p) $\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

(q) $\operatorname{tg} x$,

(r) $\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$,

(s) $\cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}$,

(t) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}$,

(u) $\cos x \operatorname{sen}^4 x$,

(v) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$,

(w) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch} x}$,

(x) $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$,

3. (Exercício IV.22 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $(x^2+1)^3$, b) e^{x+3}, c) 2^{x-1},
d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$, e) $\dfrac{x}{1+x^2}$, f) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$,
g) $\operatorname{cotg} x$ h) $3^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x$, i) $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,
j) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, k) $\dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$, l) $\cos x\cos 2x$.

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, b) $3\operatorname{sen} x+2x^2$, c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,
d) xe^{-x^2}, e) $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$, f) $x\sqrt{1+x^2}$,
g) $e^{2\operatorname{sen} x}\cos x$, h) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$, i) $\dfrac{1}{2+x^2}$,
j) $\dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, k) $\dfrac{x}{1+x^4}$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$,
m) $\dfrac{1}{1+3x^2}$, n) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, o) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$,
p) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, s) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$, t) $\dfrac{1}{x\ln x}$.

5. Determine uma primitiva das funções seguintes:

(a) $\cos^2 x$, (d) $4\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$, (g) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^4 x$,
(b) $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x$, (e) $\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^2 x$, (h) $\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x$,
(c) $\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x$, (f) $3\operatorname{ch}^3 x$, (i) $\sec^4 x$.

6. (Exercício IV.23 de [1]) Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

a) $f'(x)=\frac{1}{4+9x^2}$, $x\in\mathbb{R}$; $f(0)=1$.
b) $g'(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $g(0)=0, g(2)=3$.
c) $h'(x)=\sec^2 x$, para x no dominio de $\sec x$; $h(k\pi)=k, k\in\mathbb{Z}$.

7. (Exercício 5.5 de [2]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x \operatorname{sen}(x^2), \qquad \frac{e^x}{2+e^x}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$

   determine se possível:

   a) uma primitiva que se anule no ponto $x = 0$;
   b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x \to +\infty$.

8. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

$$\text{a) } \frac{1}{1-x}, \qquad \text{b) } \frac{1}{(x-3)^3}, \qquad \text{c) } \frac{x+1}{x^2+1},$$
$$\text{d) } \frac{x}{1+(x-1)^2}, \qquad \text{e) } \frac{2x+1}{x^2+4}, \qquad \text{f) } \frac{1}{x^2+2x+2},$$
$$\text{g) } \frac{x+1}{(x+2)^3}, \qquad \text{h) } \frac{x+1}{a^2+x^2}, \qquad \text{i) } \frac{1}{x^2+x+1},$$

9. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2+x}, \qquad \text{b) } \frac{x+1}{x(x-1)^2}, \qquad \text{c) } \frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)},$$
$$\text{d) } \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}, \qquad \text{e) } \frac{x^5}{x^2-1}, \qquad \text{f) } \frac{x}{(x+1)(x+2)^2},$$
$$\text{g) } \frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}, \qquad \text{h) } \frac{x^4}{x^4-1}, \qquad \text{i) } \frac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16},$$
$$\text{j) } \frac{3x^2+2}{x(x^2+2x+2)} \qquad \text{k) } \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} \qquad \text{l) } \frac{2x^2+x-5}{(x+1)^2(x-3)},$$
$$\text{m) } \frac{2x}{(x^2-1)(x+1)}, \qquad \text{n) } \frac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}, \qquad \text{o) } \frac{1+x^2}{x^3-2x^2+x},$$
$$\text{p) } \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}, \qquad \text{q) } \frac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}, \qquad \text{r) } \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$$

10. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

11. (Exercício 5.16 de [2]) Determine

   a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva G, da função
$$g(x) = \frac{x+3}{x^4 - x^2}$$
definida no intervalo $]1, +\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

12. (Exercício 5.3 de [2]) Determine uma função F definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ que obedece às seguintes condições:
$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad F(2) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 10.$$

13. (Exercício 5.12 de [2]) Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições
$$\forall_{x>-1}\ \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

14. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x + x)$, b) $e^x \operatorname{sen} x$, c) $x^3 e^{-x^2}$,
d) $\operatorname{arctg} x$, e) $\sqrt{x} \ln x$ f) $x(1+x^2) \operatorname{arctg} x$,
g) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$, h) $\ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$, i) $x^2 \ln^2 x$,
j) $\ln^2 x$, k) $\dfrac{1}{x^3} \cos \dfrac{1}{x}$, l) $\cos 2x \ln(\operatorname{tg} x)$,
m) $3x\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x$, n) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$, o) $\operatorname{ch} x \cos x$,
p) $3^x \cos x$, q) $\cos(\ln x)$, r) $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

15. (Exercício IV.25 de [1]) Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) xe^x, b) $x \operatorname{arctg} x$, c) $\operatorname{arcsen} x$, d) $x \operatorname{sen} x$,
e) $x^3 e^{x^2}$, f) $\ln^3 x$, g) $x^n \ln x,\ n \in \mathbb{N}$, h) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

16. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $x \cos x$ b) $x \ln x$ c) $x^2 \operatorname{sen} x$
d) $x \ln(1+x)$ e) $\cos^2(x)$ f) $\operatorname{sen}^3(x)$
g) $\cos^3(x) \operatorname{sen}^2(x)$ h) $\sqrt{x} \operatorname{arctg}(1/\sqrt{x})$ i) $\sqrt{x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$
j) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ k) $x(\ln x)^2$ l) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
m) $\operatorname{sen}(x) \ln(1 + \operatorname{sen} x)$ n) $x^2 \sinh x$ o) $\cosh^2(x)$

17. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

$$P\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right)\right).$$

b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1-k)}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right)P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right).$$

(Sugestão: $\frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$).

c) Utilize a alinea anterior para calcular

$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right), \qquad P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right).$$

18. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x = t^2$

b) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{x+3}}$, $x + 3 = t^2$

c) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}$, $x + 2 = t^2$

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$, $x + 1 = t^2$

e) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1 + 2x = t^2$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x = t^6$

g) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $t^2 = \dfrac{x}{x+2}$

h) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

i) $\dfrac{1}{1+e^x}$, $t = e^x$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1 + e^x$

k) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t = \ln x$

l) $\dfrac{1}{x\ln x(1-\ln x)}$, $t = \ln x$.

19. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$,

b) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$,

c) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$,

d) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$,

e) $\dfrac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}$,

f) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$,

g) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$,

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$,

i) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

j) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$,

k) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$,

l) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

m) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, n) $\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}$, o) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$,

20. Determine, usando a substituição indicada num domínio apropriado, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x,\ t=\operatorname{sen} x$,
b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$,
c) $\sqrt{1-x^2},\ x=\operatorname{sen} t$
d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,
e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4},\ x=\cos t$,
f) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}},\ t=\sqrt{1-e^x}$,
g) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,
h) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ x=\operatorname{sen}^2 t$,
i) $\dfrac{3\operatorname{sen} x+3}{\cos x+\operatorname{sen} 2x},\ t=\operatorname{sen} x$,
j) $\sec^3 x,\ t=\operatorname{sen} x$,
k) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x=\operatorname{tg} t$,
l) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x},\ t=\operatorname{sen} x$,
m) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ t=\sqrt{1-x^2}$,
n) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}},\ t=\sqrt{1+e^x}$,
o) $\sqrt{4+x^2},\ x=2\operatorname{tg} t$,
p) $\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$.
q) $\dfrac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2(x)},\ t=\operatorname{sen} x$
r) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}},\ t=\operatorname{sen} x$
s) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x)+3(\cos x-1)},\ t=\cos x$
t) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))},\ t=\cos x$
u) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)},\ t=\operatorname{sen}(x)$
v) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)},\ t=\cos(x)$
w) $\dfrac{1}{\cosh x},\ t=\sinh(x)$
x) $\dfrac{1}{2+\operatorname{tg} x},\ t=\operatorname{tg} x$.

21. Determine, usando a substituição indicada num domínio apropriado, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sqrt{1+x^2},\ x=\operatorname{tg} t$
b) $\sqrt{1+x^2},\ x=\sinh t$
c) $\sqrt{x^2-1},\ x=\dfrac{1}{\cos t}$
d) $\sqrt{x^2-1},\ x=\cosh t$
e) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ x=\operatorname{sen} t$
f) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},\ t^2=1+x^2$

g) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \operatorname{tg} t$ h) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \sinh t$

i) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $t^2 = x^2 - 1$ j) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \dfrac{1}{\cos t}$

k) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh t$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x = \operatorname{sen}^2(t)$

22. (Exercício 5.21 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

 a) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

 b) $g'(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x > 16$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

23. (Exercício 5.24 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

 a) $f''(x) = (1 + \operatorname{sen} x)\cos x$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 3$.

 b) $g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

24. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

25. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $|x|$, b) $x \arcsin \dfrac{1}{x}$, c) $\operatorname{sen}(\ln x + 1)$,

d) $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$, e) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, f) $\dfrac{1+\ln^2 x}{x\,(1+\ln x)}$,

g) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}-2e^x+2}$, h) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$, i) $\cos^3 x$,

j) $\cos^4 x$, k) $x \ln \dfrac{1-x}{1+x}$, l) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

m) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x\ln x}$, n) $\ln(x+\sqrt{x})$, o) $\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$,

p) $\cos x \ln(1+\operatorname{sen}^2 x)$, q) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$, r) $x \operatorname{arctg}^2 x$,

s) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, t) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, u) $\dfrac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$,

v) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+3\cos^2 x}$, w) $\ln(\cos x)\operatorname{tg} x$, x) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}$,

y) $(\operatorname{arcsen} x)^2$, z) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}$.

26. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $e^{x-1}(1+e^x)$ b) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

d) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ e) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

g) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ i) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$

j) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$ k) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^3(x)}$ l) $x\operatorname{tg}^2(x)$

m) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$ n) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$ o) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

p) $x\operatorname{arctg}(1+x)$ q) $\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$ r) $\ln(\sqrt{1+x^2})$

s) $x\ln(\sqrt{1+x^2})$ t) $\operatorname{arcsen}(1/x)$ u) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$

v) $e^{\sqrt{x}}$ w) $\ln(x+\sqrt{x})$ x) $e^x\ln(1+e^{2x})$

y) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$ z) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

5 CÁLCULO INTEGRAL

5.1 Definição e propriedades do integral

1. (Exercício VI.1 de [1]) Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$

   (a) Mostre que para toda a decomposição do intervalo $[0,2]$, as somas superior $S_d(f)$ e inferior $s_d(f)$ verificam $s_d(f) \leq 4 \leq S_d(f)$.

   (b) Recorrendo directamente à definição, mostre que f é integrável e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

2. (a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre recorrendo à definição, que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

   (b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   (a) Mostre que $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = 1/2$.

   (b) Justifique que f não é integrável em $[0,1]$.

4. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{k} & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é descontínua em qualquer ponto da forma $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

(b) Mostre que f é monótona crescente. Justifique que f é integrável em $[0, 1]$.[1]

5. Diz-se que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é *seccionalmente contínua* se f é contínua excepto num número finito de pontos $\{c_1, \dots, c_n\}$, incluindo possivelmente os extremos a e b, e em que todos os limites laterais $\lim_{x\to c_i^\pm} f$, $\lim_{x\to a^+} f$, $\lim_{x\to b^-} f$ existem e são finitos. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua então f é integrável em $[a, b]$.

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $f \geq 0$. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então f é identicamente nula.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Mostre que se existe $c \in [a, b]$ com $f(c) > 0$ então $\int_a^b f(x)dx > 0$.

8. Mostre que se f é contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.

9. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f = \int_a^b g$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

10. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

    Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

11. Prove que, se f é contínua em $[a, b]$ e g é integrável e não negativa em $[a, b]$, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

1. Determine as derivadas das funções seguintes:

   (a) $\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, (c) $\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt$, (e) $\int_{x^2}^{x^4} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt$,

   (b) $\int_x^{2\pi} \cos(t^2)\,dt$, (d) $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, (f) $\int_1^{x^2} x\cos(\sqrt{t})\,dt$.

2. (Exercício 6.13 de [2]) Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$.

[1]Ou seja, f é um exemplo de uma função integrável com um número infinito (numerável) de descontinuidades.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(t) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e calcule $\psi''(x)$.

4. (Exercício 6.9 de [2]) Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ verificando a condição
$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

5. Mostre que a função seguinte é constante (ie não depende de x):
$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

6. (Exercício 6.16 de [2]) Calcule
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4}.$$

7. Calcule os limites:
$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3}(e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt}.$$

8. (Exercício 6.53 de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
   (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.
   (b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.
   (c) Prove que se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

9. (Exercício 6.46.c) de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

10. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[-1,1] \setminus \{0\}$ tal que $f(0^+)$ e $f(0^-)$ existem em $\mathbb{R}$ e para $x \in [-1,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt.$$

   (a) Justifique que F e G estão bem definidas.

   (b) Mostre que se $f(0^+) \neq f(0^-)$, então F não é diferenciável em 0.

   (c) Mostre que G é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

11. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que se $\int_c^d f = \int_c^d g$ para quaisquer $c, d \in [a,b]$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

12. (Exercício VI.15 de [1]) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt,$$

   onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t)\,dt = 0$.

13. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

   a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (5.1).

   b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (5.1) então f é par e g é ímpar.

   c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (5.1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

14. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

   a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$, b) $g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt$, c) $h(x) = \int_1^x (x-t)e^{t^2}\,dt$.

15. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

16. Considere a função de variável real definida por $\psi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{|t|\,e^{-t^4}}{1+t^2}\,dt$.

    a) Calcule os zeros e o sinal de ψ;

    b) Mostre que $\psi(x) \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right), \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

17. (Exercício 6.49 de [2]) Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ e $f'(x) < 0$, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt.$$

    (a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raizes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

    (b) A função g é majorada? E minorada?

5.3 Regra de Barrow e aplicações

1. Calcule
$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{c)} \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^{1} \operatorname{tg} x\,dx.$$

2. Calcule
$$\text{a)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \operatorname{arctg} x\,dx,$$
$$\text{c)} \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,dx, \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx,$$
$$\text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx, \qquad \text{f)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

3. Calcule o valor dos integrais seguintes:
$$\text{a)} \int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{c)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx,$$
$$\text{d)} \int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx, \qquad \text{e)} \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx, \qquad \text{f)} \int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt$$
$$\text{g)} \int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)dx, \qquad \text{h)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx, \qquad \text{i)} \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx.$$

4. (Exercício V.9 de [1]) Sendo $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$, $x > 0$, mostre que
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

5. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ através da expressão $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\, dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que
$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 0.$$
(**Sugestão:** considere a mudança de variável $tx = y$.)

6. Mostre que, para qualquer $x > 0$,
$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$
(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

7. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Mostre que
$$\int_0^1 F(x)\, dx = F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.$$
(**Sugestão:** use integração por partes.)

8. (Exercício 6.45 de [2]) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então
   (a) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.
   (b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T sse $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

9. (Exercício 6.56 de [2]) Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.
   (a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.
   (b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.
   (c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$?

10. (Exercício 6.51 de [2]) Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$.
   (a) Justifique que g é ímpar.
   (b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.
   (c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.
   (d) Justifique que g é limitada.

11. (Exercício V.14 de [1]) Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t\,dt.$$

   a) Calcule $\phi(2)$.
   b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.
   c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

12. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:
   a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$,
   b) $y^2 = 4(1-x)$ e $y^2 = 2(2-x)$,
   c) $x^2 y = 1$, $y = -27x$, e $x = -8y$,
   d) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$,
   e) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, e $y = x^2$,
   f) $y = e^x$, $y = 1 - x$, $x = 1$.
   g) $y = \ln(1+x)$, $y = -\ln(1+x)$, $x = e-1$.
   h) $y = \ln(1+x^2)$, $y = \ln 2$,
   i) $y = xe^{x-1}$, $y = 1$ e $x = 0$.
   j) $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$, $y = \cos x$,
   k) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = x$.
   l) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = 2$.

13. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:
   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$,
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \geq x^3,\ y \leq 4x\}$,
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x \wedge x \leq a\}$, $a > 1$,
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ln 2,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3-e^x}\}$,
   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\}$,
   f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\right\}$
   g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \operatorname{sen} x\}$.

h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} .\}$.

14. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

15. (Exercício 6.61 de [2]) Calcule a área de região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq \sqrt{3}x^2$.

16. (Exercício 6.62 de [2]) Calcule a área de região do plano limitada pelo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

17. (Exercício 6.63 de [2]) Calcule a área de região plana consitituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \qquad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \qquad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

18. (Exercício 6.70 de [2]) Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas de equações

$$y = \ln x, \qquad y = \ln^2 x.$$

6 SÉRIES

6.1 Séries numéricas

1. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$

2. Use os resultados do Ex. 1.2.15 e a definição de série para verificar que:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2},$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2,$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5-2k}{3^k} = 1,$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2,$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1.$

3. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, se possível, a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1},$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n \pi^{-2n},$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1},$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\pi^{-n+2}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}+1}{3^n}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}$, n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)2^{-n}$,

o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n)$, p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

4. Determine a natureza das seguintes séries (de termos não-negativos):

a) $\displaystyle\sum\frac{n-2}{3n+1}$ b) $\displaystyle\sum\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum\frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ d) $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

e) $\displaystyle\sum\frac{n+1}{n^3+1}$ f) $\displaystyle\sum\frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ g) $\displaystyle\sum\frac{n!}{(n+2)!}$ h) $\displaystyle\sum\frac{n^2}{n^3+1}$

i) $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ j) $\displaystyle\sum\frac{5^n}{4^n+1}$ k) $\displaystyle\sum\frac{2^n}{3^n-1}$ l) $\displaystyle\sum\frac{2^{2n}}{3^n+1}$

5. Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\displaystyle\sum\frac{(n+1)^3}{3^{2n}}$ b) $\displaystyle\sum\frac{n^3}{n!}$ c) $\displaystyle\sum\frac{(2n)!}{n^n}$ d) $\displaystyle\sum\frac{n!}{(2n)!}$

e) $\displaystyle\sum\frac{2^n n!}{n^n}$ f) $\displaystyle\sum\frac{3^n n!}{n^n}$ g) $\displaystyle\sum\frac{a^n n}{b^n}$, $a,b\in\mathbb{R}^+$

6. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos, usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-4}{n^4-1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{1-2^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$, r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

7. (Exercício II.14 de [1]) Determine a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$, i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$.

8. (Exercício 2.13 de [2]) Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n.$$

9. (a) Determine a natureza das séries

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}, \quad \text{iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n}, \quad \text{iv)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}.$$

(Sugestão: Utilize o critério do integral para i) e ii) e o critério de comparação para iii) e iv).)

(b) Justifique que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^\alpha n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$$

divergem para $\alpha \leq 1$ e convergem para $\alpha > 1$.

10. (a) Justifique que se f é uma função real tal que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

(b) Determine a natureza das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

11. (Exercício 2.15 de [2]) Sendo (a_n) o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries

$$\sum (1 + a_n), \qquad \sum \frac{1}{n^2 + a_n}.$$

12. (Exercício 2.17 de [2]) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

a) Mostre que a convergência da série $\sum a_n$ implica a convergência da série $\sum a_n b_n$.

b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\sum a_n$ converge então também converge $\sum a_n^2$.

c) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

13. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$,

(g) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(h) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

(i) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(j) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n^2 - 1}$,

(k) $\displaystyle\sum (-3)^{-n}$

(l) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

14. (Exercício II.17 de [1]) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1},$$
$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}, \qquad \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

15. Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ também converge. Dê um exemplo em que $\sum a_n^2$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

6.2 Séries de potências

1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries convergem absolutamente, simplesmente ou divergem:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}, \qquad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n},$$
$$\text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}, \qquad \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}.$$

2. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

$$\text{a)} \sum \frac{x^n}{4^n+2}, \qquad \text{b)} \sum \frac{x^n}{(n+1)2^n} \qquad \text{c)} \sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$$
$$\text{d)} \sum \frac{(x-2)^n}{2^{2n}-1} \qquad \text{e)} \sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n \qquad \text{f)} \sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$\text{g)} \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n \qquad \text{h)} \sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n \qquad \text{i)} \sum \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$$
$$\text{j)} \sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-x)^n \qquad \text{k)} \sum \frac{(2x-1)^n}{n^3+2} \qquad \text{l)} \sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$$
$$\text{m)} \sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{(n+1)^n} \qquad \text{n)} \sum \frac{n!}{n^n} x^n \qquad \text{o)} \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

3. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simples-

mente convergentes e divergentes as séries

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n+1}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n$.

4. (Exercício II.18 de [1]) Determine os intervalos de convergência das séries seguintes, indicando em que pontos é cada série simplesmente ou absolutamente convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n+1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

5. (Exercício 2.50 de [2]) Suponha que a série de potências de x

$$\sum a_n x^n$$

é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3:

a) Indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.
b) Indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais a série é divergente.
c) Dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

6. Calcule o domínio de convergência e a soma das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!3^n}x^n$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+1}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}x^{4n}$.

6.3 Séries de Taylor

1. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

   a) $f(x) = e^{2x+1}, \quad a = 0,$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}, \quad a = 0,$

   c) $f(x) = \cos(x+1)^2, \quad a = -1,$ d) $f(x) = \ln x, \quad a = 2,$

   e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad a = 0,$ f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt, \quad a = 0,$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0,$ h) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 1,$

   i) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad a = 0,$ j) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad a = 0.$

2. (Exercício IV.16 de [1]) Quando possível, desenvolva em série de Mac-Laurin[1] as funções:

   a) $x^3 + 1,$ b) $\ln x,$ c) $\ln(x+3),$

   d) $\dfrac{1}{(1-x)^3},$ e) $\dfrac{1}{x(x-1)},$ f) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)},$

   g) $\dfrac{1}{\sqrt{x}},,$ h) $x\operatorname{arctg} x,$ i) $\operatorname{sen} x \cos x,$

   Para os desenvolvimentos que não for possível obter, explique a razão desse facto; para os que tiver obtido, indique o intervalo em que representam a função considerada.

3. (Exercício IV.17 de [1])

   Questão análoga à anterior, sendo os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin substituídos por desenvolvimentos em série de Taylor relativa ao ponto 1 e as funções a desenvolver substituídas por:

   a) $x^2 - x + 1,$ b) $\dfrac{1}{x},$ c) $e^x,$

   d) $x \ln x,$ e) $\dfrac{x}{(x+1)^2},$ f) $x^{-2}(x-1)^2,$

   g) $x^2(x-1)^{-2},$ h) $x\ln(x-1),$ i) $\sqrt[3]{x-1},$

[1] I.e., em série de Taylor em $a = 0$.

4. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^4}{1-2x}$.

   (a) Desenvolva f em série de potências de x e indique um intervalo aberto no qual a função coincide com a série obtida.

   (b) Utilize o desenvolvimento em série encontrado para determinar $f^{(n)}(0)$ e justifique que f tem um mínimo local em 0.

5. (Exercício 4.158 de [2]) Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $f(x) = (x-1)e^x$ e indique os pontos em que a soma da série obtida é igual ao valor da função. Aproveitando o desenvolvimento obtido, calcule $f^{(n)}(1)$.

6. (Exercício 4.146 de [2])

   (a) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ e indique, justificando, em que pontos é que a série converge absolutamente.

   (b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

   $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

   no conjunto de todos os pontos onde a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor no ponto 1 da função $x + g'(x)$.

7. (Exercício 4.154 de [2]) Desenvolva em série de MacLaurin a função $\phi(x) = x\ln(1+x^3)$ e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 (mostre que $\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\phi^{(4)}(0)$).

8. Desenvolva a função

   $$\phi(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t^2)\,dt$$

   em série de MacLaurin, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Decida se ϕ tem um extremo em 0; em caso afirmativo, classifique-o.

Parte II

Soluções

1 Números Reais (Soluções)

1.1 Propriedades algébricas

1. a) $\frac{x^2}{4}$
   b) x
   c) $\frac{1}{x}$
   d) $|x|$
   e) x
   f) 2^{x+2}
   g) $2^{x(x+2)}$
   h) $\sqrt{x}$
   i) $\sqrt{x^2 - 4}$
   j) $\sqrt{x(x+1)} + x$
   k) $\ln(x)$
   l) $2\ln\left(x^2 + x^{-2}\right)$.

2. (a) $x + |x-1| = 2x - 1$, se $x \geq 1$, ou $x + |x-1| = 1$, se $x < 1$.
   (b) $|x^2 - 4| = x^2 - 4$, se $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$, ou $|x^2 - 4| = 4 - x^2$, se $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.
   (c) $|2x + |x-3| + |3-x|| = 6$, se $x < 3$, ou $|2x + |x-3| + |3-x|| = |4x - 6| = 4x - 6$, se $x \geq 3$.

3. a) $x = 1 \vee x \geq 2$
   b) $-2 \leq x \leq 1$
   c) $-1 \leq x \leq 1$
   d) $x \leq 0 \vee x = 1$
   e) $x = -4 \vee x = 2$
   f) $x = 1 \vee x = 2$
   g) $x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x > 1$
   h) $x = 1 \vee x = -1$
   i) $0 < x < 1 \vee x < -1$
   j) $x < 0$
   k) $x \geq 2 \vee x \leq -\frac{2}{3}$
   l) $x \leq 1$
   m) $-2 \leq x \leq 2$
   n) $-2 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 2$
   o) $x < 0$
   p) $x = 0$
   q) $0 < x \leq 1$
   r) $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

4.

a) $]-1,+\infty[$
b) $]0,+\infty[$
c) $[-4,1]$
d) $]-\infty,-2]\cup\{1\}\cup[2,+\infty[$
e) $[-2,-1]\cup[1,2]$
f) $\{-1\}\cup[0,2]$
g) $[-2,2]$
h) $]-1,0]\cup]1,+\infty]$
i) $]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,3[$.

5. (a) Eleve os dois membros ao quadrado, por exemplo.
   (b) Escreva $|x|\le|x-y|+|y|$ e $|y|\le|x-y|+|x|$ (porquê?).

6. (a) i. $\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\ a+x^2=0$.
   ii. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ x>y$.
   iii. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ |x-1|>1\Rightarrow|x|>2$.
   iv. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\neq0}\ \dfrac{x}{y}>1\Leftrightarrow x>y$.
   (b) São todas falsas.
   (c) i. $\exists_{a\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ a+x^2\neq0$; ii. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x\le y$; iii. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ |x-1|>1\wedge|x|\le2$; iv. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\neq0}\left(\dfrac{x}{y}>1\wedge x\le y\right)\vee\left(\dfrac{x}{y}\le1\wedge x>y\right)$.

7. a) Verdadeira; b) Falsa; c) Falsa; d) Falsa; e) Verdadeira; f) Falsa; g) Verdadeira; h) Verdadeira; i) Falsa; j) Falsa; k) Verdadeira; l) Falsa; m) Verdadeira; n) Falsa..

8. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 40; d) $\frac{7}{3}$.

1.2 Método de Indução Matemática (Sols.)

1. a) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2,\quad\forall n\in\mathbb{N}$:
   Para $n=1$, temos $2\cdot1-1=1$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n\in\mathbb{N}_1$, temos $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.
   Tese (a provar): $1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$.
   Usando a hipótese de indução, temos:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+2-1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

   como queríamos mostrar.

   Alternativamente, podemos escrever $1+3+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ e usar o facto $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1$.

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 1$, temos $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
Tese (a provar): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
Usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.
(Alternativamente: usando somatórios, como a)).

c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$:
Para $n = 4$, temos $(4!)^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$, que uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, temos $(n!)^2 > 2^n n^2$.
A provar: $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2$.
Temos $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^2(n!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n!)^2 > 2^n \cdot 2$. Por hipotese, $(n!)^2 > 2^n n^2$ e como $n^2 > 2$, se $n \geq 4$, o resultado segue (da propriedade transitiva).

2. c) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$:
Para $n = 0$, a condição acima fica $a - 1 = a - 1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$.
Tese: $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n + a^{n+1}) = a^{n+2} - 1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1 + a + \cdots + a^{n+1}) = \quad (a-1)(1 + a + \cdots + a^n) + (a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1 + a + \cdots + a^{n+1}) &= a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}. \\ &= a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1} \\ &= a^{n+2} - 1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 1$, a condição fica $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{1+1!} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$.
Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right)\\ &= 1 - \frac{n+2-n-1}{(n+2)!}\\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

3. a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.
Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n+3 \geq 4 > 0$, temos então que

$$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$

como queríamos mostrar.

b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:
Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n - 3 < 2^{n-2}$.
Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.
Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$

Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

c) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divisível por 6.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é divisível por 6. Isto significa que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $6k = 7^n - 1$.

Tese: $7^{n+1} - 1$ é divisível por 6, isto é, existe um natural positivo j tal que $7^{n+1} - 1 = 6j$.
Então:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(6k + 1) - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1 = 6(7k + 1)$$

em que na terceira igualdade usámos a hipótese de indução. Demonstrámos então a tese com $j = 7k + 1$.

4. a) Vamos ver que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, ou seja, que se $n^2 + 3n + 1$ é par, também $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ é par. Temos

$$(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4.$$

Assumindo que n^2+3n+1 é par, como $2n+4 = 2(n+2)$ é também par, conclui-se que $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ sendo uma soma de números pares será par.

b) Não.

c) Indução. . . (Como acima: se $n^2 + 3n + 1$ é ímpar, $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ será uma soma de um número ímpar com um número par, e será portanto ímpar. Mas neste caso $P(0)$ é verdadeira: 1 é ímpar.)

5. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a proposi,ção

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Para $n = 1$, fica $|a_1| \leq |a_1|$, que é verdadeira. Para mostrar que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, vamos usar a Desigualdade Triangular: $|x+y| \leq |x|+|y|$, para $x, y \in \mathbb{R}$. Assumimos, por hiótese de indução que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ para certo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso,

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$$

(usando a Desigualdade Triangular na primeira desigualdade e a hipótese de indução na segunda). Temos então que $P(n + 1)$ é verdadeira, como queriamos mostrar.

6. Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$:

Para $n = 0$, a condição fica $(1 + a)^0 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Tese: $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.

Desenvolvendo o lado esquerdo e usando a hipótese de indução, temos que

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a),$$

dado que $a+1>0$. Como

$$(1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

uma vez que $na^2 \geq 0$, temos agora $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, como queríamos mostrar.

7. a) 48; b) 28; c) 210; d) 24; e) 746; f) -5; g) 5/6.

9. a) 189; b) 10660; c) 6075; d) $-20/21$; e) $12-4\cdot 3^{21} = 414841412800$.

10. (a) Ver Ex. 1.b).
    (b) Usar a propriedade telescópica.

11. Prop. telescópica (e homogeneidade).

12. (a) Ver Ex. 2.c).
    (b) Usar homogeneidade e propriedade telescópica.

1.3 Axioma do Supremo

1. Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar, com $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ é ímpar, uma vez que $4k^2+4k$ é par para qualquer k.

   Conclui-se que se n^2 é par, n também será.

2. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x+y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$, logo $-x, x^{-1}, x+y \in \mathbb{Q}$.

3. Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x+y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x+y)-x$ seria racional. Mas $(x+y)-x = y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x+y$ é irracional.

   Para mostrar $x-y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

   Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais: por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \text{etc.}$$

4. a) $A =]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [4, +\infty[$, logo $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

   b) $\sup A$ não existe, porque A não é majorado;
   $\min(A \cap B) = -3$, $\max(A \cap B) = 4$;
   $\inf(A \cap B \cap C) = -3$, $\sup(A \cap B \cap C) = -\frac{4}{3}$, $\min(A \cap B \cap C)$ não existe, porque $-3 \notin A \cap B \cap C$.

5. $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $\sup A$, $\max A$ não existem, uma vez que A não é majorado; $\inf A = 0 \notin A$, logo $\min A$ não existe.

   $\sup A \cup B$ (e $\max A \cup B$) não existem, porque $A \cup B$ não é majorado; $\inf A \cup B = \min A \cup B = -1$.

6. $A =]1, e]$: Majorantes de A: $[e, +\infty[$, Minorantes de $A :]-\infty, 1]$, $\sup A = e = \max A$, $\inf A = 1$, $\min A$ não existe, porque $1 \notin A$.

   $B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$: Majorantes de B: $[2, +\infty[$, Minorantes de B : $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.

7. a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \quad \vee \quad |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1$.
   Assim, $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

   b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;
   $A \cap B = \left]1, \sqrt{2}\right]$: $\min A \cap B$ não existe, $\max A \cap B = \sqrt{2}$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não existe, já que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, e $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$; $\max C$ não existe; $\max B \setminus C = \sqrt{2}$.

8. a) $A =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

   b) $A \cap B = \{-2\} \cup [1, 2]$: $\min A \cap B = -2$, $\max A \cap B = 2$.
   $A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =]1, 2[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$: $\sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 2$, $\inf A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$, $\min A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $\max A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não existem, porque $1, 2 \notin A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

9. b) $A \cap B = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right] \cap \mathbb{Q}$: $\sup A \cap B = 3$, $\max A \cap B = 3$, uma vez que $3 \in A \cap B$, $\inf A \cap B = -1 + \sqrt{2}$, $\min A \cap B$ não existe, porque $-1 + \sqrt{2} \notin A \cap B$.
   $C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}$: $\sup C = \max C = 1$ (porque $1 \in C$ e 1 é majorante), $\inf C = 0$, $\min C$ não existe porque $0 \notin C$.

10. b) $A \cap C = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[\ \cap \mathbb{Q}$: Majorantes de $A \cap C$: $\emptyset$.
    $B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, logo $B \cap C = \{0\}$, uma vez que $k\pi \notin \mathbb{Q}$, para $k \neq 0$. Majorantes de $B \cap C = [0, +\infty[$.
    $\sup A$ não existe, $\inf A \cap C = -1/2$, $\min A \cap C = -1/2$, $\min B$ não existe, porque B não é minorado, $\min B \cap C = 0$.

11. a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4}{|x-1|}\leq 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|}\leq 0\\ &\Leftrightarrow\; x^2-2\leq 0 \;\wedge\; |x-1|\neq 0 \quad (\text{porque } x^2+2>0 \text{ e } |x-1|\geq 0)\\ &\Leftrightarrow\; x\in\left[-\sqrt{2},\,\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

Então,

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \;\wedge\; x\in\left[-\sqrt{2},\,\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}\right\}=\left[0,\,\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k\in\mathbb{N}$ tal que $kx\notin\mathbb{Q}$ então $x\notin\mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx\in\mathbb{Q}$ para todo o $k\in\mathbb{N}$. Portanto $B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ então $1\cdot x=x\notin\mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A\setminus B=\left(\left[0,\,\sqrt{2}\right[\setminus\{1\}\right)\cap\mathbb{Q}$. Então,

$$\sup A=\sup A\setminus B=\sqrt{2}=\max A,$$
$$\inf A=\inf A\setminus B=0=\min A=\min A\setminus B.$$

$A\setminus B$ não tem máximo pois $\sup A\setminus B=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

12. a)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2}{|x|-1}\leq 0 \Leftrightarrow&(x^2<2\wedge|x|>1)\vee(x^2\geq 2\wedge |x|<1)\\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\wedge(x<-1\vee x>1),\end{aligned}$$

uma vez que $|x|<1\Rightarrow x^2<1$, logo $x^2\geq 2\wedge|x|<1$ é impossível. Assim, $A=\left[-\sqrt{2},-1\right[\,\cup\,\left]1,\,\sqrt{2}\right]$.

b) $A\cap\mathbb{Q}=\left(\left]-\sqrt{2},-1\right[\,\cup\,\left]1,\,\sqrt{2}\right[\right)\cap\mathbb{Q}$. $\sup A\cap\mathbb{Q}=\sqrt{2}\notin A\cap\mathbb{Q}$, logo $A\cap\mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A\cap\mathbb{Q}=-\sqrt{2}\notin A\cap\mathbb{Q}$, logo $A\cap\mathbb{Q}$ não tem mínimo.

$B=\{2^{n/2}:n\in\mathbb{N}\}$. $\inf B=\min B=\sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.

$B\cap\mathbb{Q}$: temos $2^{n/2}\in\mathbb{Q}$ sse n é par, ou seja, $B\cap\mathbb{Q}=\{2^n:n\in\mathbb{N}\}$. $\inf B\cap\mathbb{Q}=\min B\cap\mathbb{Q}=2$, $\sup B\cap\mathbb{Q}$ e $\max B\cap\mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

13. Por definição, A é majorado se existe $x\in\mathbb{R}$ com $x\geq a$, para todo $a\in A$. Como $x\geq a\Leftrightarrow -x\leq -a$, temos A é majorado $\Leftrightarrow -A$ é minorado. Se A é nãovazio, $-A$ também será e existem $\inf(A)$ e $\sup(-A)$. Sendo $\alpha=\inf(A)$, vemos que $-\alpha$ é o supremo de $-A$:

14. Como $s = \sup A$, sabemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$. Como $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset = (V_{\varepsilon_0}(s) \cap A) \setminus \{s\}$, vemos que $V_{\varepsilon_0}(s) \cap A = \{s\}$, em particular, $s \in A$ e A tem máximo.

15. Se m é majorante de A e $m \neq \sup A$ então $m > \sup A$. Tem-se $x \leq \sup A < m$, para qualquer $x \in A$, logo, para $0 < \varepsilon < m - \sup A$, $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

16. Se B é majorado e $A \subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \Rightarrow B \neq \emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A \leq \sup B$.

17. a) $x \in U \Rightarrow x \leq \sup U < \sup V$.

    b) Se para qualquer $y \in V$, $y \leq \sup U$, então $\sup U$ é majorante de V e seria $\sup U \geq \sup V$.

18. b) $\sup A > \inf B \ \wedge \ \sup B > \inf A$, por exemplo:
    $A = [0, 1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2] : A \cap B \neq \emptyset$;
    $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $B = [\frac{1}{2}, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : A \cap B = \emptyset$. Ou, mais simples: $A = \{0, 1\}$ e $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$.

1.4 Sucessões (Soluções)

1. a) Limitada. Decrescente. b) Limitada. Não monótona. c) Não majorada, não minorada. Não monótona. d) Minorada, não majorada. Não monótona. e) Limitada. Crescente (estritamente). f) Não majorada, não minorada. Não monótona. g) Limitada. Crescente (estritamente).

2. (a) Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.
    Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n - 1}$.
    Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.
    Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n - 1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1},$$

    como queríamos mostrar.

   (b) Seja $P(n)$ a proposição $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$. Para $n = 1$, temos $v_1 = \frac{3^1}{(1!)^2} = 3$, e $P(1)$ é verdadeira. Para provar $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, assumimos
    Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$ (i.e $P(n)$ é verdadeira)
    e queremos provar:

Tese: $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$ (i.e. $P(n+1)$ é verdadeira).
Temos por hipótese, $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$. Usando a fórmula de recorrência,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2} = \frac{3\frac{3^n}{(n!)^2}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

como queríamos mostrar.

3. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, e (u_n), (v_n) sucessões tais que $u_1 = a$, $u_{n+1} = r + u_n$ e $v_1 = a$, $v_{n+1} = rv_n$.

a) Mostrar que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$:
Vamos considerar só a progressão aritmética (u_n):

- $n = 1$: $u_1 = a = a + (1-1)r$.
- Hipótese de indução: $u_n = a + (n-1)r$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $u_{n+1} = a + nr$. Então, por hipótese,

$$u_{n+1} = r + u_n = r + a + (n-1)r = a + nr.$$

b) (i) (u_n) monótona crescente: em geral, $u_{n+1} - u_n = r$, logo (u_n) será monótona crescente sse $r \geq 0$, com a qualquer (se $r = 0$, (u_n) é a sucessão constante igual a a). Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3 + u_n$.

(ii) (u_n) monótona decrescente: $r \leq 0$, a qualquer. Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -3 + u_n$.

(iii) (v_n) monótona crescente: em geral, $v_{n+1} - v_n = ar^n - ar^{n-1} = ar^{n-1}(r-1)$. Logo, (v_n) será monótona crescente sse $a \geq 0 \wedge r \geq 1$ ou $a \leq 0 \wedge 0 \leq r \leq 1$ (se $r < 0$, r^{n-1} muda de sinal, e (v_n) não é monótona). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n$, $v_1 = -2$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$,

(iv) (v_n) não seja monótona: de (iii), (v_n) não é monótona sse $r < 0$ (a qualquer). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = -3v_n$.

c) (u_n) não é limitada: temos, por a), $u_n = a + (n-1)r$, logo dado $b \in \mathbb{R}$ qualquer, para $r > 0$,

$$u_n > b \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{r} + 1$$

e portanto (u_n) não é majorada. Se $r < 0$, (u_n) não será minorada.
Quanto a (v_n), de a), $v_n = ar^{n-1}$, logo (v_n) será limitada/convergente sse r^{n-1} for limitada/convergente, ou seja, será limitada para $-1 \leq r \leq 1$, convergente para $-1 < r \leq 1$, a qualquer.

4. b) Seja $\varepsilon > 0$. Para determinarmos os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $\frac{n^2}{n^2+1}$ está a uma distância do (suposto) limite 1 menor do que ε, resolvemos

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < 1$, temos então

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Se $\varepsilon \geq 1$, então $\frac{1}{n^2+1} < 1 < \varepsilon$ e, portanto esta implicação é sempre válida. (Demonstrou-se assim que tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, tem-se:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon.)$$

c) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, tem-se $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$.

d) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}}$, tem-se $\left|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

5. (a) Para determinar a distância de $u_n = \frac{n+3}{n+2}$ a $\frac{3}{2}$,

$$\left|\frac{n+3}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|1 + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}$$

(dado que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} < 0$, para qualquer n). Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Se $\varepsilon \geq 1/2$ esta condição verifica-se para qualquer n, mas se $\varepsilon < 1/2$, temos $u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow n < \frac{1}{1/2-\varepsilon} - 2$, ou seja, só se verifica para um conjunto finito, e portanto $3/2$ não é limite de u_n.

(b) $u_n = 1 + (-1)^n = 0$, se n ímpar, e $u_n = 2$ se n par. Dado $0 < \varepsilon < 2$, temos $u_n \in V_\varepsilon(0)$ se, e só se, n é ímpar. Em particular, todo o u_n com n par arbitrariamente grande está fora da vizinhança, e portanto 0 não é limite de u_n.

6. (a) Basta notar que se $s = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ então para qualquer margem de erro $\epsilon > 0$, temos

$$V_\epsilon(s) \cap \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists_{N\in\mathbb{N}} u_N \in V_\epsilon(s).$$

Como u_n é crescente, temos $u_n \in V_\epsilon(s)$ para $n \geq N$ (já que neste caso $u_N \leq u_n \leq s$).

7. Como $u_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$, para qualquer n, ou seja, (u_n) é (estritamente) decrescente. Por outro lado, (u_n) é minorada (uma vez que $u_n > 0$ para qualquer n). Logo é convergente.

8. De $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_n - 1 < x_n < y_n + 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < b + 1$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < y_n < b$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada. Como é monótona, será convergente. De $x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$, e $\lim(x_n + \frac{1}{n}) = \lim(x_n - \frac{1}{n}) = \lim x_n$, conclui-se do critério das sucessões enquadradas, que (y_n) é convergente e $\lim y_n = \lim x_n$.

9. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limitada, $-\frac{1}{2} \le u_n \le 1$; convergente $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

   $v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}$ não majorada, não convergente.

   $w_n = u_n v_n$ limitada, não convergente, $u_n v_n = \frac{(-1)^{n+1} n^{n+1}}{n(n^n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^n+1}$ tem dois sublimites diferentes, $1, -1$.

10. $u_n = \cos(n!\pi)$: como, para $n > 1$, $n!$ é um número natural par, temos $\cos(n!\pi) = 1$, para qualquer $n > 1$. Logo, (u_n) é convergente, com $\lim u_n = 1$,

    $v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$: temos $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$, logo (v_n) terá dois sublimites diferentes, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, e não é convergente.

    $w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}}$ $(a \in \mathbb{R})$. Tem-se $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.

11. a) 0; b) 2; c) 0; d) 0; e) 0; f) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, 0 e 2; g) não existe, a sucessão não é limitada; h) 0; i) 0; j) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, e e $-e$ (note que $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).

12. a) 8, b) 8, c) 2, d) 1, e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, f) 1, g) 0, h) 3, i) 1/2, j) 1, k) 0, l) $\frac{(a^n)^2}{a^{n^2}} = a^{-n^2+2n} \to 0$, m)2; n) $\frac{1}{2}$.

13. a) $-4 < a \le 4$;

    b) $a = -4$.

14. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = a$, serão também as suas subsucessões (u_{2n}) e (u_{2n+1}), com $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Por outro lado,

$$u_{2n} \in]0, 1[\Rightarrow a \in [0, 1],$$

$$u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[=] - \infty, 0] \cup [1, +\infty[\Rightarrow a \in] - \infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

    Logo, $a \in \{0, 1\}$.

15. a) Falso: por exemplo, $u_n = 3 + (-1)^n$, é limitada, tem termos em A e não é convergente, uma vez que tem dois sublimites diferentes: 2 e 4.

    b) Verdadeiro: se (u_n) é monótona e tem termos em $A \cap V_{1/2}(0)$, será monótona e limitada, logo convergente em $\mathbb{R}$.

c) Verdadeiro: se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cup B$ com $\lim u_n = a < 0$ então $u_n < \frac{a}{2}$ a partir de certa ordem. Em particular, $u_n \in B$ e o conjunto $B \cap \{x : x < \frac{a}{2}\}$ é finito. Logo (u_n) não poderia ser estritamente decrescente.

16. (i) Verdadeiro.

    (ii) Verdadeiro.

17. (a) Por indução: $u_1 = 2 \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, se $u_n \in \mathbb{Q}$, então $u_n/2 \in \mathbb{Q}$ e também o seu inverso $1/u_n \in \mathbb{Q}$. Logo, $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$, sendo a soma de dois racionais.

    (b) Se u_n é convergente, com $u_n \to L$, então também temos $u_{n+1} \to L$ (dado que u_{n+1} é subsucessão de u_n). Tomando o limite de ambos os lados da expressão de recorrência:

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}\right) \Rightarrow L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2}.$$

É fácil ver (por indução outra vez) que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $L = -\sqrt{2}$ é impossível. Conclui-se que $L = \sqrt{2}$.

18. Seja (u_n) tal que $u_1 = a$, para $a \in \mathbb{R}$, e $u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}$. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = l$, temos que

- $\frac{u_n}{n+1}$ é convergente, com $\lim \frac{u_n}{n+1} = \lim u_n \cdot \frac{1}{n+1} = l \cdot 0 = 0$
- (u_{n+1}) é convergente, uma vez que é uma subsucessão de (u_n), com $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.

Logo, $(-1)^n u_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1}$ é também convergente. Mas, considerando as subsucessão dos termos pares e dos termos ímpares, temos $(-1)^{2n} u_{2n} = u_{2n} \to l$ e $(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \to -l$. Como $(-1)^n u_n$ converge, tem-se $l = -l \Leftrightarrow 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0$, como queríamos mostrar.

19. a) $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
    Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) é uma sucessão crescente:
Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n), e uma vez que sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), teremos (u_{n+1}) convergente com $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtem-se

$$\lim u_n - \frac{\lim u_n}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim u_n = 2.$$

22. Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluimos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluimos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$, $1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.

    Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluimos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

    Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

23. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}$:
        - $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.
        - Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$.

    b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
        - $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.
        - Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queriamos mostrar.

    c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

    d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \wedge l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

25. a) Por definição, $u_n \to -\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ sse dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n < -\frac{1}{\varepsilon}$. Seja então $\varepsilon > 0$ dado,

$$1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$. para $n > p$, temos $1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon}$. Logo $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

26. a) i) Por definição, $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ sse dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Neste caso, $u_n > 0$, logo

$$u_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < \varepsilon,$$

e assim $\frac{1}{u_n} \to 0$.

b) Não. Por exemplo, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ e $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$.

27. a) $\frac{n^n}{1000^n} = \left(\frac{n}{1000}\right)^n$. Como $\lim \frac{n}{1000} = +\infty$, temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{1000^{n+1}}}{\frac{n^n}{1000^n}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1000^n}{1000^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1000}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.

b) $\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\ldots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.

c) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$.

d) $\lim 3^n - (2n)! = \lim(2n)!\left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$.

e) $\lim(n! - n^{1000})^n = \lim\left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n n^{1000n} = +\infty$.

f) Como $\lim \frac{n+2}{n+1} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$, tem-se, $\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$.

g) Como, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, $\lim \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$, tem-se $\lim \frac{n^{1000}}{1.0001^n} = 0$.

h) Neste caso, $\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$ e, logo, estamos na presença de uma indeterminação do tipo 0^0. Mas, como

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} = 1, \qquad \text{(verifique)}$$

podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = 1$.

i) Como $\lim(3^n + 2) = +\infty$, temos uma indeterminação do tipo $(+\infty)^0$. Como

$$\lim \frac{3^{n+1} + 2}{3^n + 2} = 3, \qquad \text{(verifique)}$$

concluímos que $\lim \sqrt[n]{3^n + 2} = 3$.

j) Temos uma indeterminação do tipo $(+\infty)^0$. Como

$$\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim n + 1 = +\infty,$$

concluímos que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

k) $\lim \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n = 2^{+\infty} = +\infty$.

l) Neste caso temos uma indeterminação do tipo 1^∞. No entanto,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n} = \lim \left(1 + \frac{-2}{2^n}\right)^{2^n} = e^{-2}$$

dado que $2^n \to +\infty$.

m) Novamente temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Neste caso,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = +\infty.$$

28. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $+\infty$; e) não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$; f) 0; g) 1; h) 0; i) $+\infty$; j) 1; k) 2; l) $+\infty$; m) $+\infty$; n) $\frac{1}{e}$; o) 1.

29. a) $\lim \frac{n!}{n^{1000}} = +\infty$, uma vez que $\lim \frac{n!}{n^p} = +\infty$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

    b) $\lim \frac{(2n)!+2}{(3n)!+3} = 0$, porque $\lim \frac{(2n)!}{(3n)!} = 0$ (calcular).

    c) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n} = +\infty$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, com $u_n = \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ (verifique).

    d) $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2} = 0$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$, com $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ (verifique).

    e) $\lim \frac{2^n n!}{n^n} = 0$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$, com $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ (verifique).

f) $\lim \frac{3^n n!}{n^n} = +\infty$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1$, com com $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ (verifique).

g) $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$, porque $\lim \frac{n+1}{n} = 1$.

h) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, porque $\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

i) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim \frac{1}{n^n} = 0$,

j) $\lim \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^2} = 1$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, com $u_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^2$.

k) $\lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n} = +\infty$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$, com $u_n = \frac{2^{(n^2)}}{15^n}$ (verifique) .

l) $\lim \sqrt[n]{3^{n+1} n^3} = 3$.

2 Funções: Limites e Continuidade (Soluções)

2.1 Funções elementares (Soluções)

1. (a) $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: é (estritamente) decrescente e minorada por 0, não é majorada;

   (b) $\dfrac{x}{1+x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: é limitada $0 < \frac{x}{1+x} < 1$ em $\mathbb{R}^+$, e (estritamente) crescente (escreva $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$);

   (c) $\dfrac{1}{1+|x|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: é limitada $0 < \frac{1}{1+|x|} \leq 1$, par, não monótona (estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$);

   (d) $2^{-x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: estritamente decrescente, $0 < 2^{-x} < 1$ em $\mathbb{R}^+$;

   (e) $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$: não majorada, minorada por 0, se $a > 1$, é estritamente crescente e se $a < 1$, estritamente decrescente, se $a = 1$ é crescente e decrescente, i.e., é constante.

   (f) $2\,\mathrm{sen}(\pi x) - 3\cos(\pi x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: não monótona, limitada $|2\,\mathrm{sen}(\pi x) - 3\cos(\pi x)| \leq 5$, logo $-5 \leq 2\,\mathrm{sen}(\pi x) - 3\cos(\pi x) \leq 5$ (notem que 5 e -5 não são o supremo/máximo e ínfimo/mínimo da função, o cálculo destes valores é difícil sem recurso ao Cálculo Diferencial).

2. a) $p(x) = 1$; b) $p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$; c) $p(x) = ax^2 - ax + 1$, $a \in \mathbb{R}$; d) $p(x) = ax^2 - ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. a) $p(x) = ax^2 - ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$; b) impossível; c) $p(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

4. a) Factorize p nas primeiras n raizes e calcule $p(r_{n+1})$, em que r_{n+1} é a $n+1$-ésima raiz.

   b) Tome $h(x) = p(x) - q(x)$.

5. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0,+\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2},+\infty[$. Para $x>0$ e $y\in\,]e^{-2},+\infty[$, temos

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^{x^2-2}=y \Leftrightarrow x^2-2=\ln y \Leftrightarrow x=\sqrt{\ln y+2}.$$

Logo, a inversa de f é

$$f^{-1}:\left]e^{-2},+\infty\right[\to\mathbb{R}^+,\quad f^{-1}(y)=\sqrt{\ln y+2}.$$

b) O contradomínio de sen restrito a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ é $\operatorname{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$, logo o contradomínio de f é $[-2,2]$. Para $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y\in[-2,2]$, temos

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x=y \Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}$$

(note-se que $\frac{y}{2}\in[-1,1]$, que é o domínio de $\operatorname{arcsen}x$). Logo a inversa de f é

$$f^{-1}:[-2,2]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\quad f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}.$$

c) $f^{-1}:[-1,1]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\arccos y.$

d) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\left]1-\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right[$, $f^{-1}(y)=1+\operatorname{arctg}y$.

6. Por definição, $\operatorname{arcsen}([-1,1])=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos([-1,1])=[0,\pi]$. Tem-se $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, $\arccos 1=0$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

7. a) $x=-\frac{1}{2}$; b) $x=\pm\sqrt{2}$; c) $x=\pm\frac{1}{2}$; d) $x\leq 0$; e) $\sqrt{3}<x\leq 2$; f)$-2\leq x\leq-\sqrt{3}\vee\sqrt{3}\leq x\leq 2$.

8. $\operatorname{sen}x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen}a+2k\pi\vee x=-\operatorname{arcsen}a+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

$\cos x=a\Leftrightarrow x=\arccos a+2k\pi\vee x=-\arccos a+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg}x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}a+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

9. a) Directamente da definição de arcos.

b) Directamente da definição de arcsen.

c) Se $\alpha=\operatorname{arcsen}x$, então $\operatorname{sen}\alpha=x$ e $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$, temos $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha\geq 0$, vem

$$\cos(\operatorname{arcsen}x)=\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$$

d) Idêntico a c).

e) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Queremos calcular $\operatorname{tg}\alpha$. De $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

f) Idêntico a e).

10. $f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é estritamente crescente. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos

$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$

Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

12. a) i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4} = 1$;

iv) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$;

v) De i) e iv), temos $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. Logo, $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.

b) Resulta directamente da definição.

c) Temos sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente, logo a sua inversa argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh} x = y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}.\end{aligned}$$

Como $e^y > 0$, temos

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Para argch, é semelhante, sendo que temos de restringir $\operatorname{ch} y$ a $y \geq 0$, para garantir injectividade.

13. a) $]-2,2[$; b) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; d) $]1,+\infty[$; e) $[0,1[$; f) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, g) $[-1,+\infty[$, h) $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; i) $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; j) $]-\infty,0]$; k) $[-1,\operatorname{sen} 1[$; l) $[1,e^2]$.

14. a) $g(p(x))$; b) $f(q(x))$; c) $f(g(x))$; d) $q(p(x))$; e) $f(f(x))$; f) $q(g(x))$; g) $f(q(f(x)))$; h) $f(p(x))$; i) $p(q(g(x)))$.

2.2 Limite de funções (Soluções)

1. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se e só se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Para $f(x) = x^2 + 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, temos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 + 1 - a^2 - 1| = |x^2 - a^2| = |x+a||x-a| \leq (|x| + |a|)|x-a|.$$

Se $x \in V_\delta(a)$, $x \neq a$, temos $0 < |x-a| < \delta$ e também $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a| < \delta+|a|$. Logo, para $x \in V_\delta(a)$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < (\delta + |a| + |a|)|x-a| < (2|a| + \delta)\delta \leq (2|a|+1)\delta,$$

escolhendo sempre $\delta \leq 1$. Agora para que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, por transitividade, é suficiente escolher $1 \geq \delta > 0$ tal que

$$(2|a|+1)\delta < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}.$$

Neste caso, temos então $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário,[1] existe $\delta > 0$ tal que
$$|x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Então, dado $\varepsilon > 0$, temos
$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$
Tomando, por exemplo, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, mostramos que $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

   c) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que
$$x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Dado $\varepsilon > 0$, temos
$$\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$
Tomando, por exemplo, $\delta = \varepsilon^2$, mostramos que $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$.

3. a) 4; b) 1; c) 1; d) -1; e) 1/2; f) -3.

4. a) $+\infty$, 1; b) 0, 1; c) 1, e; d) $+\infty$, 0; e) e, e^{-1}; f) $+\infty$, 0; g) 1, $+\infty$; h) 1, e; i) e, e^{-1}; j) 0, $-\infty$; k) $-\infty$, 0; l) 0, $+\infty$; m) $-\infty$, 0, n) $-\infty$, $+\infty$; o) 0, 0.

5. a) 0, 1, 1; b) 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 0, 1, -1; d) 0, $+\infty$, $-\infty$.

6. a) $+\infty$, 0, 1, 1; b) $+\infty$, $-\infty$, 0, 0; c) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1; d) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1; e) $+\infty$, $+\infty$, 0, 0; f) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1.

7. a) Como $\lim x_n = 2$ e f é contínua em 2, temos $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(2) = \frac{1}{2}$.
   b) Da mesma forma, $\lim f(x_n) = f(2) = \ln 2$.
   c) Neste caso, f não é limitada numa vizinhança de 2, logo $f(x_n)$ tambem não é limitada, e portanto $\lim f(x_n)$ não existe.

8. Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$, temos
$$\lim f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0^-), \quad \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0^+).$$
Então,
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow f(0^-) + f(0^+) = 1.$$
Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, temos $f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0^-) + f(0^+) = 1$, temos $2\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

[1] ou um $R > 0$, suficientemente grande, $R = 1/\varepsilon$.

11. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ (funções enquadradas).

(b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe: se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ temos que

- $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$;
- $\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.

Como $\lim \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} \neq \lim \operatorname{sen}\frac{1}{y_n}$ e (x_n), (y_n) são sucessões convergente para 0, temos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe.

$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^\pm} \operatorname{sen}(y) = 0$ (tomando $y = 1/x$).

(c) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$: temos $-x \leq x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x$, e o resultado segue pelo principio das funções enquadradas.

$\lim_{x\to\pm\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x$).

(d) $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ (como acima)

$\lim_{x\to\pm\infty} x\cos\frac{1}{x} = \pm\infty$.

12. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = 1$;

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)+x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1$;

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)} = -1$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 0\cdot 1 = 0$, uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2x+1)} = 1/2$, uma vez que $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$.

f) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)+\ln(x)}{x-1} = 1 + 1 = 2$,

g) $\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ não existe (sucessões)

h) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+1} = 0$;

i) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ (funções enquadradas)

j) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right] = 0$ (funções enquadradas).

k) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x} = +\infty$.

l) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x$).

m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$.

n) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\sqrt{x} = 0$.

o) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^5}\,\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)}{\cos x} = 1$,

q) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{2x} = 1/2$.

13. a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$, tomando $y = \operatorname{sen} x \to 0$, se $x \to 0$.

    b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \frac{5}{\cos x \arccos x} = 1 \cdot \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

    c) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arcsen} x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$, fazendo a mudança de variável $y = \operatorname{arcsen} x \to 0$, se $x \to 0$.

    d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{1-u} = -\frac{1}{2}$, fazendo a mudança de variável $u = \cos x \to 1$, se $x \to 0$ e usando que $\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$.

    e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2$.

    f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x} = 2$.

    g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0$.

    h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1+\arccos x)}{\arccos x} = 1$.

2.3 Continuidade (Soluções)

1. a) $\frac{x+1}{x^3+x}$ é dada pelo quociente de duas funções polinomiais, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

   b) Como a): é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$;

   c) $\sqrt{x}$ é contínua em $[0, +\infty[$, $\frac{1}{x^2+x}$ é contínua no seu domínio (como em a)), ou seja em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Logo $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$ é contínua em $[0, +\infty[\cap(\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}) =]0, +\infty[$;

   d) $\operatorname{sen}\left(\cos \sqrt{1-x^2}\right)$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$;

   e) Como d): é contínua no seu domínio, $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[$;

   f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios logo é contínua no seu domínio, ou seja em $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x \neq k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

   g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é também dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio que é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo será contínua no seu domínio que é $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. (Nota: $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = 1$, se $x < -1 \vee x > 1$, e $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = -1$, se $-1 < x < 1$.)

i) $\sqrt{\ln x}$ é dada pela composição de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln x > 0\} =]1, +\infty[$.

2. Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto 1, e $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, então, como $\operatorname{sen} x$ é uma função contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$, g será contínua em $a \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(a) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Como tg e cotg são contínuas, respectivamente em $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$. Como,

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - 1}{\operatorname{tg} a},$$

e, portanto, $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$ equivale a $\operatorname{tg} a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

4. Temos

$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por definição: para $a \neq 0$: existe $\varepsilon > 0$, por exemplo, $\varepsilon = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.

Para $a = 0$: $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Logo f é contínua em 0.

Usando limites relativos a subconjuntos: para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} x = a,$$

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Conclui-se que se $a \neq 0$, $\lim_{x \to a} xd(x)$ não existe, e portanto f não é contínua em $a \neq 0$. Para $a = 0$,

$$\lim_{x \to 0, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0} xd(x) = 0 = f(0)$$

(já que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Logo f é contínua em 0.

5. Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), e (x_n) convergente de termos em $[a, b]$ tal que $\lim \phi(x_n) = 0$. Se $L = \lim x_n$, então $L \in [a, b]$. Como ϕ é contínua em $[a, b]$, $\lim \phi(x_n) = \phi(\lim x_n) = \phi(L)$. Logo, temos $\phi(L) = 0$.

6. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$.

   a) Se existisse uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo n, então $\lim g(x_n) = +\infty$. Em particular, g não seria limitada em $[0,1]$, o que é impossível, do Teorema de Weierstrass, uma vez que g é contínua em $[0,1]$.
   (Alternativamente, tomando uma subsucessão (x_{p_n}) convergente de (x_n) - que existe porque x_n é limitada, Teorema de Bolzano-Weierstrass - teríamos $\lim g(x_n) = +\infty$ e $\lim g(x_{p_n}) = g(\lim x_{p_n})$, porque g é contínua. Logo $g(\lim x_{p_n}) = +\infty$, o que é absurdo.)

   b) Se (x_n) de termos em $[0,1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Seja $\lim x_n = c$. Como $(x_n) \subset [0,1]$ e este intervalo é fechado $c \in [0,1]$. Temos então $\lim g(x_n) = g(c)$ e portanto $g(c) = 0$.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \vee x < 0, \\ x, & \text{se } x > 0 \ \wedge x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   a) Para $x \leq 0$, temos $f(x) = 0$, logo $f(]-\infty, 0]) = \{0\}$. Para $x > 0$ temos $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$. Logo $f(]0, +\infty[= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Assim, $f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$.
   A função não é majorada, uma vez que $\mathbb{Q}^+$ não é majorado, é minorada por 0.

   b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$;
   $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe: se $x_n = \sqrt{2}n$ então $f(x_n) = 0$, se $y_n = n$ então $f(y_n) = n \to +\infty$.

   c) f contínua para $x \leq 0$ e descontínua em qualquer $x > 0$ (ver Ex. 2.3.4).

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1,, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Como f é contínua em 1, temos $f(1) = f(1^+) = f(1^-)$. Temos $f(1) = K$ e
$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}.$$
   Logo $K = \frac{\pi}{2}$.

   b) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (justificar).

   c) A partir dos contradomínios de arcsen e sen temos
$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty, -1]) \cup f(]-1, 1[) \cup f([1, +\infty[) \\ &= \{0\} \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty}$, não existe (justificar).

9. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Para $a > 0$: φ é contínua em a uma vez que (numa vizinhança de a)é dada pela função $1 + e^{1-x}$, que é contínua – composição de funções contínuas.

Para $a < 0$: φ é contínua em a uma vez que (numa vizinhança de a) é dada pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, que é contínua (em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) por ser dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios.

b) $\varphi(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 1 + e^{1-x} = 1 + e$

$\varphi(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Como $\varphi(0^+) \neq \varphi(0^-)$, φ não é contínua em 0. Mas $\varphi(0^+) = \varphi(0)$, logo φ é contínua à direita em 0.

c) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{1-x} = 1$,

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0$.

d) $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]-\infty, 0[) \cup \varphi([0, +\infty[) = \left]0, -\frac{\pi}{2}\right[\cup]1, 1 + e]$ (justifique).

11. f é prolongável por continuidade ao ponto 0 se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, se $f(0^+) = f(0^-)$. Temos

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.$$

Logo, $a = 2$. Se F é prolongamento por continuidade de f, então $F(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

12. (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(x + 2) = -\infty$.

(b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 sse $\ln\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

(c) Em $]-\infty, 0]$, F é dada por uma parabola, com zeros em 0 e -2, de concavidade para baixo. Logo terá um máximo em $x = -1$ dado por $F(-1) = f(-1) = 1$. Como F é contínua, o contradomínio de F em $]-\infty, 0]$ é dado por $F(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (usando a)).

Em $\mathbb{R}^+$, $F(x) = \ln\left(\frac{2}{2+x^2}\right)$ é decrescente e $F(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, em particular 1 é o máximo (global) da função. De novo pela continuidade de F e de a), vem que $F(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0[$ e portanto $CD_f =]-\infty, 1] \cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1]$.

13. (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) = \lim_{y\to 0} 3\cos y = 3$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(k-x)(x+1)) = -\infty$.

(b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = k$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3\cos(\pi) = -3$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 sse $k = -3$.

(c) Em $]-\infty, 0[$, $F = f$ é dada por uma parabola $-(3+x)(x+1)$, com zeros em -3 e -1, de concavidade para baixo. Logo terá um máximo em $x = -2$ dado por $F(-2) = f(-2) = 1$. Como F é contínua em $]-\infty, 0]$, $F(0) = -3$, o contradomínio de F em $]-\infty, 0]$ é dado por $F(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (usando a)).

Em $[0, +\infty[$, como $F(0) = -3$, F é contínua e de a), temos que F assume todos os valores de -3 a 3. Por outro lado, de $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \le 1$, temos $-3 \le F(x) < 3$ ($0 < \frac{\pi}{1+x^2} \le \pi$). Logo, $F([0, +\infty[) = [-3, 3[$ e portanto $CD_f =]-\infty, 1] \cup [-3, 3[=]-\infty, 3]$.

14. a)
- φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$, e $\lim_{x\to 0} \psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, uma vez que para qualquer sucessão (x_n) com $x_n \to 0$, temos
$$\lim x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = 0$$
por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada. Por outro lado,
- $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ não existe, uma vez que para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tem-se $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e $\lim \cos \frac{1}{x_n} = \lim \cos(2n\pi) = 1$ e $\lim \cos \frac{1}{y_n} = \lim \cos((2n+1)\pi) = -1$.
Logo $\lim_{x\to 0} \psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) • $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.

• Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Quanto a $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a, +\infty[$ e em $]-\infty, -a]$. Para $x \in [-a, a]$, temos

$$\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq a.$$

Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a, a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)

15. a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 0.$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$

c) $CD_f = f(D) = f([0, 1[) \cup f(]1, +\infty[)$.

• $f([0, 1[)$: se $x \in [0, 1[$, então $x - 1 < 0$ e assim $f(x) \leq 0$, ou seja, $f([0, 1[) \subset]-\infty, 0]$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty, 0] \subset f([0, 1[)$. Logo, $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.

• $f(]1, +\infty[)$: se $x \in]1, +\infty[$, então $f(x) > 0$, ou seja $f(]1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Como f é contínua em $]1, +\infty[$, e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0, +\infty[\subset f(]1, +\infty[)$. Logo, $f(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d) • (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.

• (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

16. a) f e g são contínuas no seu domínio, $]0, +\infty[$, por serem dadas pela composição e produto de funções contínuas nos seus domínios.

    b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

    c) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, logo f não é prolongável por continuidade a 0; $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, logo g é prolongável por continuidade a 0.

    d) Como f é contínua em $\mathbb{R}^+$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, temos do Teorema do Valor Intermédio, que $CD_f = f(D) = \mathbb{R}$.

    (Alternativamente, $x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow 1 + x \in]1, +\infty[$ e $\ln(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$. Logo, $f(D) = \ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.)

17. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
    $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

    b) Em $a > 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\ln \frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

    Em $a < 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

    c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{1+x^2} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

    Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

    d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

    então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$.

    Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\varepsilon, 0[$ que $g(x) \leq g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\ln \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \varepsilon]$, $g(x) \leq g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

2.4 Continuidade Global (Soluções)

1. (Note-se que os pontos fixos de f correspondem aos zeros de $h(x) = f(x) - x$). Temos $h(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$ e $h(-1) = f(-1) - (-1) = 1 > 0$. Como h é contínua, do Teorema de Bolzano, terá pelo menos um zero, i.e., existe $c \in]-1, 1[$ tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

4. Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty.$$

Queremos ver que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2],\ x \in]a, b[.$$

Então, para $x \in]a, b[$, a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$. Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x\to a^+} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x\to b^-} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a, b[$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a, b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0, +\infty[$ e portanto

$$h(]a, b[) = \operatorname{arctg}([0, +\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $h([a, b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen}^3 0 + \cos^3 0 = 1$ e para $x = \pi$, $\operatorname{sen}^3 \pi + \cos^3 \pi = -1$. Se $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 < 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x \in]0, \pi[$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$.

6. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$, então as soluções da equação correspondem aos zeros de f. Temos $f(0) = 1$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas, tem-se do Teorema do Valor Intermédio / de Bolzano que existem $c_1 \in]-\pi, 0[$ e $c_2 \in]0, \pi[$ com $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

7. Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1 < \frac{1}{2}$ e para $x = \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2}$. Como $\operatorname{sen} x - \cos x$ é contínua, conclui-se do teorema do Valor Intermédio / de Bolzano que existe $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ com $\cos c - \operatorname{sen} c = \frac{1}{2}$. Como $\operatorname{sen} x - \cos x$ é periódica, o resultado segue.

8. Seja $p \in \mathbb{N}$ ímpar e $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} \cdots + a_1 x + a_0$. Podemos assumir que $a_p > 0$ (senão consideramos $-f$). Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_p x^p \left(1 + a_{p-1}\frac{1}{x} \cdots + a_1 \frac{1}{x^{p-1}} + a_0 \frac{1}{x^p}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_p x^p = \pm\infty.$$

Tem-se então que a função muda de sinla, e do Teorema do Valor Intermédio / de Bolzano, segue que f tem um zero (e também que $CD_f = \mathbb{R}$, é sobrejectiva).

9. (a) Tomando a função $g(x) = f(x) - f(x_0)$, tem-se g contínua em I e $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$, logo existe $c \in I$ tal que $g(c) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio.
   (b) Considere-se $x_0, x_1, x_2 \in I$ quaisquer, com $x_0 < x_1 < x_2$. Como f é injectiva, $f(x_0) \neq f(x_1) \neq f(x_2)$. Se for $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ pela alínea anterior teríamos $f(c) = f(x_0)$ o que é impossível, dado que f é injectiva. Concluimos que $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ e f é estritamente crescente ou $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ e f é estritamente decrescente.
   (c) g é monótona em $]-\infty, 0]$.

10. a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

$$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que φ tem máximo e mínimo em D.

   b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1, 1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \ln(x)$, então $\lim_{x\to1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to-1^+} \varphi(x) = -\infty$.

12. Como $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, fixo $R > 0$, existem $a, b \in]-1, 1[$ tais que se $-1 < x < a$ ou se $b < x < 1$, então $f(x) > R$. Neste caso $f(a) \geq R$ e $f(b) \geq R$, porque f é contínua em a, b. Do Teorema de Weierstrass, sendo contínua, a função terá mínimo em $[a, b]$, i.e., existe c tal que $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a, b]$. Mas se $x \in]-1, a[\cup]b, 1[$, então $f(x) > R \geq f(a) \geq f(c)$, logo $f(c)$ é mínimo em $]-1, 1[$. O contradomínio sai do Teorema de Bolzano / Valor Intermédio.

13. Seja f contínua em $\mathbb{R}$ tal que existem e são finitos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b,+\infty[$, para algum $b\in\mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty,a]$ para algum $a\in\mathbb{R}$.

   Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a,b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

b) Considerando a função $h(x)=f(x)-x$, temos $\lim x\to\pm\infty h(x)=\lim x\to\pm\infty - x=\mp\infty$. Como h é contínua e o produto dos dois limites é negativo ($h(x)>0$ para $x<x_0$ e $h(x)<0$, para $x>x_1$), o Teorema do Valor Intermédio/ de Bolzano garante que existe c tal que $h(c)=0\Leftrightarrow f(c)=c$.

c) Para $g(x)=\frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x)\leq 1$ e $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)=0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existem $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(a)>0$ e $f(b)<0$, logo como f é contínua, o Teorema do Valor Intermédio garante que existe c tal que $f(c)=0$. Temos neste caso $g(c)=1=\max g$.

3 Cálculo Diferencial (Soluções)

3.1 Diferenciabilidade (Soluções)

1. a) $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$,

   b) $\left(\frac{2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2(x+1)^2-4x(x+1)}{(x+1)^4}$, $x \neq -1$,

   c) $\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$,

   d) $\left(x^{\frac{3}{2}}e^x\right)' = x^{\frac{1}{2}}e^x(\frac{3}{2}+x)$, $x \in \mathbb{R}_0^+$,

   e) $(x^2 2^x)' = x2^x(2+(\ln 2)x)$, $x \in \mathbb{R}$,

   f) $(\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

   g) $\left(\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)' = 1 + \frac{\cos x(x+\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

   h) $(\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\operatorname{sen}^2 x)' = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

   i) $\left(\frac{1}{1+\operatorname{cotg}(x)}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{cotg}(x))^2}$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq k\pi$,

   j) $(x^2(1+\ln x))' = 3x + 2x\ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$,

   k) $(\sinh(x)\cosh(x))' = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

   Como $f_d'(0) = f_e'(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f_e'(0) = 1$ e $f_d'(0) = -1$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

c) $f(x) = \ln|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser dada pela composição de ln, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f_d'(0) = 0$, $f_e'(0) = 2$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

3. $f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$;

$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$.

(Nota: Logo f é contínua mas não diferenciável em 0.)

4. Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

logo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

e portanto $f(0) = 0$.

(Também podíamos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0.)$$

Agora,

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 1,$$

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

(Nota: De novo, f é contínua mas não diferenciável em 0.)

5. Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} 2x = 1 + 2\cdot 0 = 1,$$

resulta que f é contínua em 0 sse $a = 1$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = 2.$$

Logo f é diferenciável em 0 sse $b=2$ (e $a=1$).

Neste caso, $f'(0)=2$ e a tangente ao gráfico em $(0, f(0))$ é dada por $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 1+2x$.

Se $a<0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função polinomial (linear) $1+2x$, logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$ e $f'(a)=2$ para $a<0$, vindo a tangente ao gráfico em $(a, f(a))$ dada por $y = f(a)+f'(a)(x-a) = 1+2a+2(x-a) = 1+2x$ (ou seja, é a própria recta).

Se $a>0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função $1+\frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x)$ que é diferenciável em a, já que é dada por soma e produtos de funções diferenciáveis. Logo, f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e para $a>0$, $f'(a) = -\frac{2}{a^2}\operatorname{sen}^2 a + \frac{2}{a}2\operatorname{sen} a\cos a = \frac{2\operatorname{sen} a}{a}\left(-\frac{\operatorname{sen} a}{a} + 2\cos a\right)$.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0,\\ 0, & \text{se } x = 0.\end{cases}$$

a) Para $x\neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis: $x\mapsto x^2$ que é uma função polinomial, e $x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ que é a composta de uma função trigonométrica, diferenciável em $\mathbb{R}$, com $\frac{1}{x}$, diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Temos para $x\neq 0$:

$$f'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) $y = f(\frac{2}{\pi}) + f'(\frac{2}{\pi})(x-\frac{2}{\pi}) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}(x-\frac{2}{\pi})$.

c) Não existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ porque não existe

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(e uma vez que $\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (justifique)).

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
Logo f é diferenciável em $x=0$ e $f'(0)=0$.

7. a) $\ln(x \operatorname{sh} x)$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(\ln(x \operatorname{sh} x))' = \frac{\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x}{x \operatorname{sh} x}$.

   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$: domínio $[-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1]$, domínio de diferenciabilidade $]-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1[$, $(\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2 x}}$.

   c) $\frac{e^x}{1+x}$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(\frac{e^x}{1+x})' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

8. a) $(\operatorname{ch}(\cos x))' = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} \cos x$,

   b) $(\ln \ln x)' = \frac{1}{x \ln x}$.

   c) $(\ln \operatorname{sen} x)' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$,

   d) $(e^{\sqrt{x^2-1}})' = e^{\sqrt{x^2-1}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

   e) $(e^{\operatorname{arctg} x})' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$,

   f) $\left(e^{\ln^2 x}\right)' = e^{\ln^2 x} 2 \frac{1}{x} \ln x$, para $x > 0$,

   g) $(\ln(1 + e^{x^2}))' = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$,

   h) $\left(\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\cos(\operatorname{sen} x) \cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

   i) $(\operatorname{sen}^4(x) \cos^3(x))' = 4 \operatorname{sen}^3(x) \cos^4(x) - 3 \operatorname{sen}^5(x) \cos^2(x)$.

   j) $((e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^8)' = 16(e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^7(e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}})$.

   k) $(\operatorname{arctg}(x^4) - (\operatorname{arctg} x)^4)' = \frac{4x^3}{1+x^8} - \frac{4 \operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}$.

   l) $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, para $x \in \mathbb{R}^+$.

   m) $\left(\arccos \frac{1}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, para $x > 1$ ou $x < -1$.

   n) $(\cos(\operatorname{arcsen} x))' = \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

   o) $((\ln x)^x)' = \left(e^{\ln((\ln x)^x)}\right)' = \left(e^{x \ln(\ln x)}\right)' = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$,

   p) $(x^{\operatorname{sen} 2x})' = \left(e^{\operatorname{sen} 2x \ln x}\right)' = x^{\operatorname{sen} 2x}\left(2 \cos 2x \ln x + \frac{sen 2x}{x}\right)$.

   q) $((\operatorname{sen} x)^x)' = (e^{x \ln \operatorname{sen} x})' = (\ln \operatorname{sen} x + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x})e^{x \ln \operatorname{sen} x} = (\ln \operatorname{sen} x + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x})(\operatorname{sen} x)^x$.

   r) $((\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x})' = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}\right)$.

   s) $(\operatorname{tg}(e^{\operatorname{sen} x}))' = (1 + tg^2(e^{\operatorname{sen} x}))(e^{\operatorname{sen} x})' = (1 + tg^2(e^{\operatorname{sen} x}))(e^{\operatorname{sen} x}) \cos x$.

11. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x + \cos(f(x))f'(x).$$

Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0)\cos 0 + \cos(f(0))f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}\pi)\cos\pi + \cos(f(\pi))f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)\,.$$

12. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e arctg também,

$$(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{1+f^2(x)}f'(x) + f'(\operatorname{arctg} x)\frac{1}{1+x^2}.$$

13. Do teorema de derivação da função composta, para $x \in \,]0,+\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\ln x)}\left(g(\ln x)\right)' = e^{g(\ln x)}g'(\ln x)\frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)}g'(0).$$

Derivando φ', temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\ln x)}\frac{1}{x^2}\left((g'(\ln x))^2 - g'(\ln x) + g''(\ln x)\right).$$

Logo,

$$\varphi''(e) = e^{g(1)-2}\left((g'(1))^2 - g'(1) + g''(1)\right).$$

14.

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x)\\ &= g'(x^4e^{-x})(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x})\\ &= g'(x^4e^{-x})x^3e^{-x}(4-x).\end{aligned}$$

15. a) arcsen é diferenciável em $]-1,1[$ e g é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo em $]-1,1[$, f é dada pela composição de funções diferenciáveis e é assim diferenciável. Temos

$$f'(x) = g'(\operatorname{arcsen} x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = g'(0)\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Como g é estritamente monótona e arcsen é injectiva, temos que f também será injectiva. Pelo Teorema de derivação da função inversa,

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)},$$

se $f'\left(f^{-1}(2)\right) \neq 0$. Como $f(0) = g(0) = 2$, temos $f^{-1}(2) = 0$, e $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, logo $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

16. a) Uma vez que arcos é diferenciável em $]-1,1[$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}$ com contradomínio $]-1,1[$, a função composta será também diferenciável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, f é bijectiva, logo injectiva, e arcos é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.
Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}.$$

Logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2$.
Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Como $g(2) = \arccos(f(2)) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

b) O domínio de g^{-1} é dado pelo contradomínio de g. Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \arccos(]-1,1[) =]0,\pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g, ou seja, $\mathbb{R}$, e assim g^{-1} não é limitada.

17. a) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

b) $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ são contínuas e diferenciáveis no seu domínio $\mathbb{R}$, uma vez que a função exponencial o é. Tem-se

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x,$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \operatorname{sh} x.$$

c) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, logo sh é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, e não tem extremos.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0$ para $x > 0$ e $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x < 0$ para $x < 0$. Logo $\operatorname{ch} x$ é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$, tendo um ponto de mínimo absoluto em 0, $\operatorname{ch} 0 = 1$.

d) Sejam $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{-1}(x) = \operatorname{argsh} x$, $x \in \mathbb{R}$. Então,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1})(y))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a)}$$

em que $\operatorname{sh} a = y$. Uma vez que $\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{ch}(a) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(a)} = \sqrt{1 + y^2}$, segue que

$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

(Relembre do Ex. Ficha Limites e Continuidade que $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ e $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$: derive e compare.)

3.2 T. Rolle, Lagrange e Cauchy (Soluções.)

1. Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Uma vez que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $]-\infty, 0[$. Por outro lado,

$$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0, 1[$ e também terá um zero em $]1, +\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.

Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

$$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.

2. Seja $f(x) = x^5 + 5x - 5$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = 5(x^4 + 1) > 0$, em $\mathbb{R}$, logo f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e existirá no máximo uma solução da equação acima (ou Teorema de Rolle: se f tivesse dois zeros, então f' teria pelo menos um, como não é esse o caso, f tem no máximo um zero).

Por outro lado, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, logo como f é contínua, conclui-se do Teorema do Valor Intermédio / Bolzano, que f tem pelo menos um zero (aliás $CD_f = \mathbb{R}$).

3. Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle, g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

Logo f'' tem pelo menos um zero.

4. É claro que $f(-1) = f(1) = 0$ e que para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \neq 0$. Não contraria o Teorema de Rolle dado que f não é diferenciável em todos os pontos de $]-1, 1[$ (não é diferenciável em 0).

5. a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0, 1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

   b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).

   c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) Aplicando o Teorema Lagrange a $\ln x$ em $[1, x]$, temos $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c_x}$, $\quad 1 < c_x < x$.

   De $1 < c_x < x$ vem que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c_x} < 1$, logo (uma vez que $x - 1 > 0$),

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1.$$

   (b) Lagrange a e^x em $[0, x]$, se $x > 0$, ou $[x, 0]$, se $x < 0$.

   (c) Lagrange a $\operatorname{sen} x$ e a $\operatorname{tg} x$ em $[0, x]$.

   (d) Lagrange a $\operatorname{arctg} x$ em $\left[\dfrac{\pi}{4}, x\right]$.

9. Sejam $x, y \in [a, b]$, com $x < y$, por ex. Aplicando o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$, temos $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$, para algum $c \in]x, y[$. Como f' é contínua em $]a, b[$ e tem limites laterais em a e b, é limitada em $[a, b]$, logo

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq C \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

10. Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluimos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n+1$, temos que $c_n \to +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

14. (a) Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, x+1]$, temos $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$, em que $x < c_x < x+1$. Fazendo $x \to +\infty$, temos $c_x \to +\infty$, logo dado que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$

(b) Aplicar a) à função $f(x) = h(x) - mx$.

15. A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em $\mathbb{R}^+$ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$$

(note-se que $x > 0$). Agora, aplicando o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$, temos que, como $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$

para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

16. Se $a < 0$ e $b > 0$ são as soluções não-nulas de $f(x) = x^2$, temos $f(b) = b^2$, $f(a) = a^2$ e também $f(0) = 0$. Aplicando o Teorema de Lagrange nos intervalos $[a, 0]$ e $[0, b]$, temos que existem $c_1 \in]a, 0[$, $c_2 \in]0, b[$ tais que

$$\frac{f(a)}{a} = f'(c_1), \qquad \frac{f(b)}{b} = f'(c_2),$$

ou seja, $f'(c_1) = a < 0$ e $f'(c_2) = b > 0$. Como f' é contínua (f é de classe C^1), temos do Teorema do Valor Intermédio que existe $d \in]c_1, c_2[$ tal que $f'(d) = 0$.

17. a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln a \cdot a^x - \ln b \cdot b^x = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}. \tag{3.1}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1.$$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$, é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1.$$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y=x2$ e usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{arctg}(y)}{y^2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+y^2}}{2y}=+\infty.$$

e) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y=1/x$ e usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}y}{\operatorname{sen}y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y^2}}{\cos y}=1.$$

f) $\lim_{x\to 1}(\ln x\cdot\ln\ln x)$ é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to 1}-\ln x=0.$$

g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão. . .)

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} e^{-1/x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$.
(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$.
(Note que não existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'}$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

j) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x} = \ln 2$.

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy (três vezes):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}.$$

l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{2} = +\infty.$$

m) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} 2^x = 0 \cdot 0 = 0$.

n) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right) = 0$, por enquadramento, já que $(x-1)^2 \to 0$, e $0 < 1 - \cos \frac{1}{1-x} < 2$, logo

$$0 < (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) < 2(x-1)^2.$$

(A Regra de Cauchy não é aplicável.)

o) $\lim_{x\to +\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right)$, é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{1-x}$,

$$\lim_{x\to +\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} = \frac{1}{2}.$$

p) $\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{y\to0^+} -\ln y \operatorname{sen} y = \lim_{y\to0^+} -\frac{\ln y}{\operatorname{sen}^{-1} y} = \lim_{y\to0^+} \frac{\frac{1}{y}}{\cos y \operatorname{sen}^{-2} y} = \lim_{y\to0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y \cos y} = 0$$

já que $\lim_{y\to0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$.

q) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x \operatorname{sen} \sqrt{x}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos fazendo $y = \sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to0^+} \ln x \operatorname{sen} \sqrt{x} = \lim_{y\to0^+} 2 \ln y \operatorname{sen} y = \lim_{y\to0^+} 2 \ln y \operatorname{sen} y = 0$$

(como alínea anterior).

18. (a) $\lim_{x\to1^+} x^{\ln\ln x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to1^+} x^{\ln\ln x} = \lim_{x\to1^+} e^{\ln\left(x^{\ln\ln x}\right)} = \lim_{x\to1^+} e^{\ln\ln x \ln x} = e^{\lim_{x\to1^+} \ln\ln x \ln x}.$$

Agora, de c), $\lim_{x\to1^+} \ln\ln x \ln x = 0$ logo

$$\lim_{x\to1^+} x^{\ln\ln x} = e^0 = 1.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\ln x}.$$

Agora, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

(c) $\lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x}.$$

Temos que $\lim_{x\to0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

(d) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\ln x}.$$

Agora $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x} = 0$$

logo $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(e) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

já que

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = e^{-1}$$

já que, fazendo $y = 1/x$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{y\to0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen}y)}{-\ln y} = \lim_{y\to0^+}\frac{\frac{\cos y}{\operatorname{sen}y}}{-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to0^+}\frac{-y\cos y}{\operatorname{sen}y} = -1.$$

(g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x} = e^{-1}$.

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(x)\right)^{1/x} = 1$.

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{1/\ln x} = e$.

19. (a) Para $p = 1$, aplicando a Regra de Cauchy, temos $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

Assumindo por hipótese de indução que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{e^x} = 0$ para um dado $p\in\mathbb{N}$, usamos de novo a Regra de Cauchy para calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)x^p}{e^x} = (p+1)\cdot 0 = 0.$$

(b) como a)

(c) como a), notando que $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^p = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^p}{x^{-1}}$.

20. $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x$, que é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n} \to 0$, temos agora

$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = 1.$$

21. a) 1; b) a^2/b^2; c) $-1/3$; d) 0; e) 0; f) 0; g) -1; h) 0; i) $+\infty$; j) 0; k) $-1/2$; l) 0; m) 1; n)1; o) 1; p) 1; q) 1.

22. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) e^3; f) e^2; g) 1; h) 1; i) 1; j) 1; k)1; m) $e^{-1/2}$; n) $e^{-1/2}$; o) 1; p) 1; q) e^{-1}; r) e^2; s) 1; t) 1; u) 1; v) -1; w) 1; x) 1; y) e; z) 1.

3.3 Estudo de funções (Soluções)

1. a) $\frac{x}{x^2+1}$: (estritamente) crescente[1] em $[-1,1]$, (estritamente) decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$, ponto de mínimo em -1, ponto de máximo em 1, que são absolutos uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, $f(-1) = -1/2$ e $f(1) = 1/2$;

[1]Neste e noutros esboços de solução dos exercícios aplica-se, geralmente sem explicações adicionais, o seguinte raciocínio muito útil: se f é uma função diferenciável num intervalo aberto, com derivada positiva (resp. negativa), e contínua no respectivo intervalo fechado então f é estritamente crescente (resp. decrescente) no intervalo fechado. Além disso o advérbio *estritamente* será omitido pois do contexto tal é geralmente óbvio.

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$: crescente em $[-2,0[$, decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $]0,+\infty[$, ponto de mínimo em -2, que é absoluto, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ e $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$.

c) $|x^2-5x+6|$: crescente em $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ e em $[3,+\infty[$, decrescente em $]-\infty,2]$ e em $\left[\frac{5}{2},3\right]$, pontos de mínimo em $2,3$, absolutos uma vez que $|x^2-5x+6|>0$, para $x\neq 2,3$, e ponto de máximo em $\frac{5}{2}$, local uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty}|x^2-5x+6|=+\infty$. (Nota: $|x^2-5x+6|$ não é diferenciável em 2 e 3.)

d) $x\ln x$: crescente em $[e^{-1},+\infty[$, decrescente $]0,e^{-1}]$, ponto de mínimo em e^{-1}, absoluto.

e) e^{-x^2}: crescente em $]-\infty,0]$, decrescente em $[0,+\infty[$, ponto de máximo em 0, absoluto.

f) $\frac{e^x}{x}$: crescente em $[1,+\infty[$, decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,1]$, ponto de mínimo em 1, relativo uma vez que $\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$.

g) xe^{-x}: crescente em $]-\infty,1]$, decrescente em $[1,+\infty[$, ponto de máximo em 1 que é absoluto.

h) $\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$: crescente em $]-\infty,1]$, decrescente em $[1,+\infty[$, ponto de máximo em 1, que é absoluto.

2. a) f é diferenciável no ponto 1 uma vez que é dada, numa vizinhança de 1, pela função $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ que é diferenciável no seu domínio (por ser a composta de uma função trigonométrica inversa com uma função racional). Temos

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1},$$

logo $f'(1)=-\frac{1}{2}$. A tangente ao gráfico no ponto 1 é a recta

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{x}{2}.$$

b) Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0)=a$ e

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

resulta que f é contínua em 0 sse $a=\frac{\pi}{2}$.
Quanto à diferenciabilidade,

$$f'_e(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{bx}{x}=b$$

e

$$f'_d(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}.$$

Como se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, tentemos usar a regra de Cauchy. Assim, como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} = -\frac{1}{x^2+1} = -1,$$

deduz-se que $f'_d(0) = -1$ e que f é diferenciável em 0 sse $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = -1$.

c) Se $a < 0$, então numa vizinhança de a f é dada pela função polinomial $\frac{\pi}{2} - x$, que é diferenciável. Logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$.
Se $a > 0$, então numa vizinhança de a, f é dada pela função $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Concluimos que f é diferenciável em a se $a > 0$ e, portanto, f é diferenciável em $]0, +\infty[$.
Como para $a < 0$, $f'(a) = b = -1$, temos

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \le 0 \\ -\frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para ver se f é de classe C^1, ou seja, se f' é contínua: temos que f' é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (justifique). No ponto 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'(0).$$

Logo f' é contínua em 0 e portanto é de classe C^1.

d) f é decrescente em $\mathbb{R}$, não tem extremos.

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(0) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\pi}{2} - x = +\infty$. O contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (justifique).

3. (a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{-1+x^2}} = 0$. (Justifique)

(b) f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus 0$ com derivada dada por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right)' = \dfrac{-x}{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 0, \\ (x^2 e^{1-x^2})' = e^{1-x^2}(2x - 2x^3) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Temos $f'_e(0) = 0 = f'_d(0)$, logo f é diferenciável em 0, com $f'(0) = 0$.

(c) f é crescente em $]-1, 0[$ e em $]0, 1[$, decrescente em $]1, +\infty[$, já que para $-1 < x < 0$ temos $f'(x) > 0$ e para $x > 0$,

$$f'(x) = e^{1-x^2} 2x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

logo tem um zero em 1 e como f' muda de sinal, 1 é ponto de extremo, um máximo.

(d) $CD_f =]-\infty, f(1)]$ (justifique).

(e) $f_d''(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{1-x^2} 2(1-x^2) = 2e$,

$f_e''(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{1-x^2} = -1$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, a que podemos aplicar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Como a função é par, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f_d'(0) \neq f_e'(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.

Para $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ \wedge\ x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

logo f é crescente em $[0,1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$.

Para $x < 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
$$f'(-1) = 0$$

logo f é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0]$.
Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1, 0]$ e crescente em $[0, 1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermédio, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

5. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g'_e(0) = g'_d(0)$ e temos

$$g'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1,$$

$$g'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \frac{\pi}{2}$$

(Justifique!).

c) g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \leq 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $]-\infty, 0]$.
Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo, absoluto usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \geq \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $]-\infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de g é $g(\mathbb{R}) = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

6. $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ a que podemos aplicar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

b) A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Em $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{xe^{-x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} e^{-x+1}(1-x) = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$) e da mesma forma,

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} e^{x-1}(1+x) = 2.$$

Logo, $f'_d(1) = 0 \neq f'_e(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.

No ponto 0, pode ver-se (justifique!) que $f_d'(0) = e^{-1} \neq f_e'(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1-x), & \text{se } x > 1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1+x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1+x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique): $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f,

- f crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$,
- f decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1) = 1$ e $f(-1) = e^{-2} < 1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0 = f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1 = f(1)$ é máximo absoluto de f. Logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0, 1] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

7. $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|$.

a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 2\operatorname{arctg}|x| = \lim_{x\to-\infty} x + \pi = -\infty.$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2\operatorname{arctg}|x| = \lim_{x\to+\infty} x + \pi = +\infty.$$

b) A função arctg é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, $\operatorname{arctg}|x|$ é dada pela composição de funções diferenciáveis, e é portanto diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e também o será $f(x)$.
Quanto a $x = 0$:

$$f_d'(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{x + 2\operatorname{arctg}|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \lim_{x\to0^+} \frac{2}{1+x^2} = 3$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ resultante de $\lim_{x\to0^+} \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}$.) Por outro lado,

$$f_e'(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{x + 2\operatorname{arctg}|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} 1 + \frac{2\operatorname{arctg}(-x)}{x} = 1 + \lim_{x\to0^-} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Logo, como $f_d'(0) \neq f_e'(0)$, f não é diferenciável em 0.

Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ 1 - \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Para $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{2}{1+x^2} > 0$ para qualquer x, logo f é crescente em $]0, +\infty[$.
Para $x < 0$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$. Temos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

e, como $1 + x^2 > 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$, ou seja, f é crescente em $]-\infty, -1]$, e $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$, ou seja f é decrescente em $]-1, 0[$.
Conclui-se assim que -1 é ponto de máximo, relativo uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Por outro lado, como f é contínua e decrescente em $]-1, 0[$, crescente em $]0, +\infty[$, temos que 0 é ponto de mínimo, de novo relativo uma vez que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

d) Temos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(0) = 0$, e temos um máximo relativo em -1 com $f(-1) = -1 + 2\operatorname{arctg} 1 = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$. Como f é crescente e contínua em $]-\infty, -1]$ temos que, pelo Teorema do Valor Intermédio, $f(]-\infty, -1]) = \left]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$. Por outro lado, como f é decrescente e contínua em $[-1, 0]$ temos que $f([-1, 0]) = \left[0, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$. Logo $f(]-\infty, 0]) = \left]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}(\varphi(x))' &= (2\operatorname{tg}(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2\operatorname{tg}^2(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1).\end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x, φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

10. a) Como $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$, temos que para $x > 0$, $f'(x) > 0$, ou seja f é crescente em $]0, \varepsilon[$, e para $x < 0$, $f'(x) < 0$, ou seja f é decrescente em $]-\varepsilon, 0[$. Como f é contínua em 0, 0 é um ponto de mínimo local.
Se f é diferenciável em 0 então $f'(0) = 0$, uma vez que 0 é ponto de extremo.

b) Por exemplo, a função $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com $f'(x) = 2x$, e satisfaz $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$. Mas 0 não é ponto de extremo, uma vez que para $x < 0$, $f(x) > f(0)$ e para $x > 0$, $f(x) < f(0)$.

12. Em $+\infty$: $y = mx + b$ é assíntota ao gráfico de f se

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{arctgx}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Logo $y = x + \frac{\pi}{2}$ é assíntota à direita. Da mesma forma se vê que $y = x + \frac{\pi}{2}$ é assíntota à esquerda.

A função é crescente em $\mathbb{R}$, com $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, e não tem pontos de extremo.

15. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \qquad f''(x) = (\frac{2x}{1+x^4})' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$$f'''(x) = 8x^3\,\frac{3x^4-5}{(1+x^4)^3}.$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f, ou seja solução de $f'(x) = 0$, a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$ mostra que f tem um mínimo no ponto 0. Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tal facto decorre de $f'''(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \neq 0$.

16. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4e^{-x})' = x^3\,(4-x)\,e^{-x}, \qquad f''(x) = x^2(12-8x+x^2)\,e^{-x},$$

$$f'''(x) = x\,(24-36x+12x^2-x^3)\,e^{-x},$$

$$f^{(4)}(x) = (24-96x+72x^2-16x^3+x^4)\,e^{-x}.$$

Os pontos críticos de f, i.e. as solução de $f'(x) = 0$, são 0 e 4. A função é estritamente crescente no intervalo $]0,4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty,0[$ e $]4,+\infty[$ porque, em tais intervalos, a função f' é positiva e negativa, respectivamente.

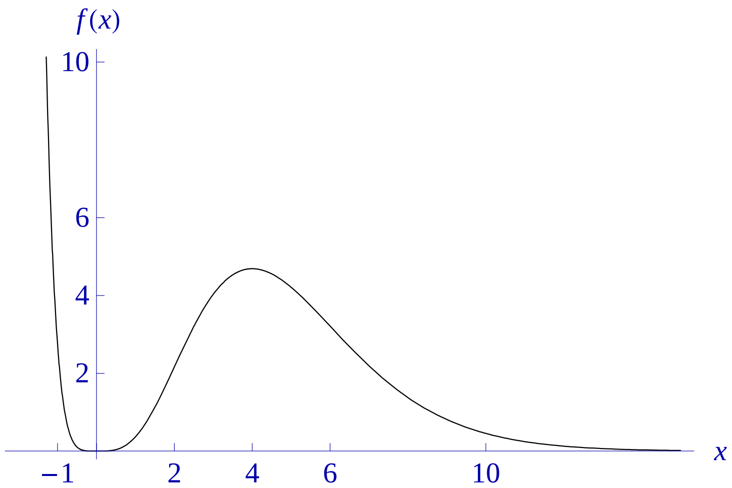
A segunda derivada $f''(4) = -64\,e^{-4} < 0$ mostra que f tem um máximo local no ponto 4, enquanto que as derivadas de ordem 3 e 4, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ revelam que f tem um mínimo local no ponto 0 (ou $f(0) = 0$ e f é não negativa - mostra que é mínimo absoluto).

Os pontos de inflexão de f são soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em 2 e 6. Tal facto decorre de $f^{(3)}(2) = -16e^{-2} \neq 0$ e $f^{(3)}(6) = 48e^{-6} \neq 0$.

Os limites de f em $\pm\infty$ existem, em $\overline{\mathbb{R}}$, e são dados por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\, e^{-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

O gráfico de f pode agora ser esboçado:



3.4 Polinomio Taylor (Soluções)

1. a) $f(x) = e^{2x}$: $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x. A fórmula de Taylor, de ordem 2, relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) &+ \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ &= e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}(x-1)^3, \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

$f(x) = \ln(1+x)$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x. A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

$f(x) = \cos(\pi x)$: $f'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x)$, $f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$, $f'''(x) = \pi^3 \operatorname{sen}(\pi x)$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)x^3,$$

em que $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x, 0[$. A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

b) $f(x) = e^{2x}$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{4}{3}e^{2\xi}x^3\right| \leq \frac{4e^2}{3}.$$

$f(x) = \ln(1 + x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3\right| \leq \frac{1}{3}.$$

$f(x) = \cos(\pi x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)x^3\right| \leq \frac{\pi^3}{6}.$$

4. Escrevendo a fórmula de Taylor para e^x em $a = 0$, com resto de Lagrange, temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x)$$

em que $r_{n+1}(x) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$, com ξ entre 0 e x. Para estimar o erro em $x = 0.1$, temos

$$|r_{n+1}(0.1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, 10^{-n-1},$$

para algum ξ entre 0 e 0.1. Tomando $n = 3$, temos

$$|r_4(0.1)| = \frac{e^{\xi}}{4!}\, 10^{-4} < 10^{-4}$$

(já que $\frac{e^{\xi}}{4!} < 1$). Logo, o polinómio de Taylor de ordem 3 aproxima $e^{0.1}$ com erro inferior 10^{-4}, ou seja, (um)a aproximação pedida é

$$p_3(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6}.$$

5. A fórmula de MacLaurin da função exponencial, de ordem 2 é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + r_2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $r_2(x) = \frac{e^{\xi}}{3!}\, x^3$, com ξ entre 0 e x. Então, para $x \in [0, 1]$ temos

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| = |\, r_2(x)| = \frac{e^{-\xi}}{3!}\, |x|^3 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

6. Como acima, tomando o polinómio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = 0$ (notando que $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 0.01$).

7. Temos $p_4(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dfrac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$. Logo:

   (a) $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $f^{(4)}(0) = 4! > 0$ tem um mínimo em $a = 0$.

   (b) $f^{(0)}(0) = f(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2,,$ $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 3!$ não tem extremo em a (a primeira derivada não nula é de ordem ímpar).

   (c) $p_4(x) = -2 + 2x - x^2, = -2 + 2x - (x-1)^2 - 2x + 1 = -1 - (x-1)^2$. Logo, $f^{(0)}(1) = f(1) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 3, 4$, $f^{(2)}(1) = -2 < 0$ tem um máximo em 2.

9. Sendo a exponencial uma função indefinidamente diferenciável, em $\mathbb{R}$, temos que g é uma função de classe C^2 num vizinhança de 0 com

$$g(x) = f(e^x), \qquad g'(x) = f'(e^x)\, e^x, \qquad g''(x) = f'\,(e^x)\, e^x + f''(e^x)\, e^{2x}.$$

Em particular temos

$$g(0) = f(1), \qquad g'(0) = f'(1), \qquad g''(0) = f'(1) + f''(1).$$

Atendendo ao polinómio de Taylor de f, de ordem 2, relativo ao ponto 1 obtemos $f(1) = 2,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 4$ e consequentemente

$$g(0) + g'(0)\,x + \frac{g''(0)}{2}\,x^2 = 2 - x + \frac{3}{2}\,x^2$$

é o polinómio de Maclaurin de g, de ordem 2.

10. Nas condições dadas, $f \in C^n(\mathbb{R})$. A fórmula de MacLaurin de f, de ordem $n-1$ é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + r_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $f^{(n)}(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a fórmula do resto de Lagrange permite concluir que

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = 0, \qquad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

em particular que f é um polinómio de grau menor que n.

11. Dado que $f \in C^2(I)$ a fórmula de Taylor de f, de ordem 1, relativa a um ponto $a \in I$ é

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2, \quad \forall x \in I,$$

em que ξ está entre a e x. Tomando $h > 0$ temos, para $x = a + h$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\,h$$

e para $x = a - h$

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\,h$$

em que $\xi_1, \xi_2 \in]a-h, a+h[\setminus\{a\}$. Resulta da igualdade

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

do facto de $\xi_1, \xi_2 \to a$, quando $h \to 0$, e da continuidade de f'' no ponto a, o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

4 Primitivação

4.1 Primitivação (Soluções)

1.

a) $\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^4$, b) $2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$,

c) $P\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\right) = P\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$,

d) $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}$, e) $P\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}\right) = P\left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$,

f) $-e^{1-x}$, g) $3\ln|x+3|$, h) $-\dfrac{1}{x-2}$, i) $\dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{2^{3x}}{3\ln 2}$,

j) $4\cosh(x/4)$, k) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$, l) $\operatorname{tg} x$, m) $-2\operatorname{cotg} x$,

n) $2\operatorname{arctg}(2x)$, o) $\operatorname{arctg}(x/2)$, p) $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)$,

q) $P(\operatorname{tg}^2 x) = P(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg} x - x$.

2.

a) $\dfrac{1}{4}\ln(3+x^4)$, b) $\dfrac{1}{2}\ln(1+2e^x)$, c) $\ln(1+\operatorname{sen} x)$, d) $2e^{\sqrt{x}}$, e) $-e^{1/x}$,

f) e^{e^x}, g) $e^{\operatorname{tg} x}$, h) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+2)$, i) $-\cos(e^x)$, j) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}$,

k) $-\dfrac{1}{1+e^x}$, l) $\dfrac{(x^2-1)^6}{12}$, m) $\dfrac{5}{6}\sqrt[5]{(x^2-1)^6}$, n) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\operatorname{sh} x)^3}$,

o) $-\operatorname{arctg}(\cos x)$, p) $P\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = P\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x$,

q) $-\ln|\cos x|$, r) $P\left(\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}\right) = -\dfrac{1}{4(1+x^4)}$, s) $P\left(\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{2}{3}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x$,

t) $P\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) = P\left(\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) = \ln(1+\operatorname{sen}^2 x)$, u) $\dfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$, v) $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$,

w) $\ln(2+\operatorname{ch} x)$, x) $\operatorname{arctg}(\ln x)$.

3.

a) $\dfrac{1}{7}x^7 + \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 + x$; b) e^{x+3}; c) $\dfrac{1}{\ln 2}2^{x-1}$;

d) $P\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}\right) = -\dfrac{1}{2}P\left(-2(1-2x)^{-\frac{1}{5}}\right) = -\dfrac{5}{8}(1-2x)^{\frac{4}{5}}$;

e) $P\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$;

f) $P\left(\dfrac{x^3}{x^8+1}\right) = \dfrac{1}{4}P\left(\dfrac{4x^3}{(x^4)^2+1}\right) = \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)$;

g) $P(\operatorname{cotg} x) = P\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \ln|\operatorname{sen} x|$;

h) $P\left(3^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\right) = P\left(3^{\operatorname{sen}^2 x}2\operatorname{sen} x\cos x\right) = P\left(3^{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen}^2 x)'\right) = \dfrac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{sen}^2 x}$;

i) $P\left(\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 2P\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) = 2P\left(\left(\sqrt{x}\right)'\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) = -2\ln|\cos\sqrt{x}|$;

j) $\operatorname{arcsen} e^x$; k) $\dfrac{1}{2(1-\alpha)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{\alpha-1}}$, se $\alpha \neq 1$, $\ln\sqrt{1+x^2}$, se $\alpha = 1$;

l) $P(\cos x\cos 2x) = P\left(\cos x(1-2\operatorname{sen}^2 x)\right) = P\left(\cos x - 2\cos x\operatorname{sen}^2 x\right) =$

$= \operatorname{sen} x - \dfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x$, (ou por partes).

4.

a) $\sqrt{2x^3}$, b) $-3\cos x + \dfrac{2}{3}x^3$, c) $\dfrac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|$,

d) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$, e) $\dfrac{3}{1+\cos x}$, f) $\dfrac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$,

g) $\dfrac{1}{2}e^{2\operatorname{sen} x}$, h) $-\dfrac{1}{x+1}$, i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

j) $\ln|\operatorname{arctg} x|$, k) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$, l) $2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$,

m) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right)$, n) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}e^x\right)$, o) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arcsen} x)^3}$,

p) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2}x^2\right)$, s) $\operatorname{sen}(\ln x)$, t) $\ln(\ln x)$.

5.

a) $P\left(\cos^2 x\right) = P\left(\dfrac{\cos(2x)+1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \dfrac{x}{2}$,

b) $P\left(\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x\right) = P\left(\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos^4 x\right) = P\left(\operatorname{sen} x(\cos^4 x - \cos^6 x)\right) =$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x$; c) $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x$,

d) $P(4\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x) = P(\operatorname{sen}^2(2x)) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)$, e) $\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x$, f) $3\operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^3 x$,

g) $P(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x) = P((\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x) + P((\sec^2 x - 1)\operatorname{tg}^2 x) =$

$P(\sec^2 x\operatorname{tg} x) - P(\operatorname{tg} x) + P(\sec^2 x\operatorname{tg}^2 x) - P(\operatorname{tg}^2 x) =$

$\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; h) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$, i) $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

6. a) Calculamos primeiro uma primitiva de $\dfrac{1}{4+9x^2}$:

$$P\left(\frac{1}{4+9x^2}\right) = \frac{1}{4}P\left(\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\right) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x.$$

Temos então, para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Para determinar c temos $f(0) = c = 1$, logo $f(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x + 1$.

b) $P(\left(\frac{1}{x-1}\right) = \ln|x-1|$, para $x \neq 1$. Temos então

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + c_1, & \text{se } x > 1 \\ \ln(1-x) + c_2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Para determinar as constantes, temos $g(0) = \ln 1 + c_2 = 0$, logo $c_2 = 0$, e $g(2) = \ln 1 + c_1 = 3$, logo $c_2 = 3$.

c) O domínio da secante é $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Neste conjunto temos $P(\sec^2 x) = \operatorname{tg} x$, e portanto para $x \in \left]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, temos $h(x) = \operatorname{tg} x + c_k$. Como $k\pi \in \left]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, temos que $0 + c_k = k$, ou seja, $c_k = k$.

7. • $P(x\operatorname{sen}(x^2)) = \frac{1}{2}\cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \frac{1}{2}\cos(x^2) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0$, logo $C = -\frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ não existe, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas.

- $P(\frac{e^x}{2+e^x}) = \ln(2+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \ln(2+e^x)+C$, com $C \in \mathbb{R}$.
  a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 + C = 0$, logo $C = -\ln 3$.
  b) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas. .
- $P(\frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
  a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.
  b) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + C = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} + C$, logo $C = -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$.

8.

a) $P\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = -\ln|1-x|$, b) $P\left(\dfrac{1}{(x-3)^3}\right) = -\dfrac{1}{2(x-3)^2}$,

c) $P\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$,

d) $P\left(\dfrac{x}{1+(x-1)^2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+(x-1)^2) + \operatorname{arctg}(x-1)$,

e) $P\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right) = \ln(x^2+4) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, f) $P\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right) = \operatorname{arctg}(x+1)$.

9. a) $P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$. Usando a decomposição em fracções simples $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ temos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

logo $A + B = 0$ e $A = 1$, ou seja, $A = 1$ e $B = -1$. Temos então

$$P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

b) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

logo $A+B=0$, $-2A-B+C=1$, $A=1$, ou seja, $A=1$, $B=-1$, $C=2$. Temos então

$$P\left(\frac{x+1}{x(x-1)^2}\right)=P\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}.$$

c) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}&=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\\&=\frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}\\&=\frac{(A+B)x^2+4A+Cx}{x(x^2+4)}\end{aligned}$$

logo $A+B=1$, $C=1$ e $4A=-4$, ou seja, $A=-1$, $B=2$, $C=1$. Temos então

$$P\left(\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}\right)=P\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+4}\right)=-\ln|x|+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

d) $2\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}$, e) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$,

f) $\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{2}{x+2}$, g) $\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}$,

h) $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$, i) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$,

j) $\ln(x^2+2x+2)+\ln(x)-\operatorname{arctg}(x+1)$, k) $-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.

10. a) O domínio de $\frac{1}{x^2+x}$ é $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. A forma geral das primitivas desta função é:

$$\begin{cases}\ln x-\ln(x+1)+C_1, & \text{se } x>0,\\ \ln(-x)-\ln(x+1)+C_2, & \text{se } -1<x<0,\\ \ln(-x)-\ln(-x-1)+C_3, & \text{se } x<-1,\end{cases}$$

em que C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias.

b) O domínio de $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$ é $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. A forma geral das primitivas desta função é:

$$\begin{cases}\ln x-\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C_1, & \text{se } x>1,\\ \ln x-\ln(-x+1)-\frac{2}{x-1}+C_2, & \text{se } 0<x<1,\\ \ln(-x)-\ln(-x+1)-\frac{2}{x-1}+C_3, & \text{se } x<0,\end{cases}$$

em que C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias.

c) O domínio de $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A forma geral das primitivas desta função é:

$$\begin{cases} -\ln x + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C_1, & \text{se } x > 0, \\ -\ln(-x) + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C_2, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.

d) O domínio de $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. A forma geral das primitivas desta função é:

$$\begin{cases} 2\ln(x-1) - \ln x + 1/x + C_1, & \text{se } x > 1, \\ 2\ln(1-x) - \ln x + 1/x + C_2, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 2\ln(1-x) - \ln(-x) + 1/x + C_3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias.

11. a) $\dfrac{1}{2}e^{x^2+2x} + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

b) $P\left(\dfrac{x+3}{x^4-x^2}\right) = P\left(\dfrac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)}\right)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Escrevendo

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

tem-se $A = -1$, $B = -3$, $C = 2$, $D = -1$ (verifique). Logo,

$$P\left(\frac{x+3}{x^4-x^2}\right) = -\ln|x| + \frac{3}{x} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| = \frac{3}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x(x+1)|}.$$

A forma geral da primitiva em $]1, +\infty[$ é $G(x) = \frac{3}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + K$, com $K \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + K = \ln(1) + K = K,$$

logo $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3 \Leftrightarrow K = 3$.

12. $P\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{x-1}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A forma geral das primitivas é:

$$\begin{cases} -\frac{1}{x-1} + C_1, & \text{se } x > 1, \\ -\frac{1}{x-1} + C_2, & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

em que C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias. Como $F(2) = 0$, temos $-1 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 1$. Como $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$, de $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 10$ tem-se $C_2 = 10$.

13. Sendo $P\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(x+1)$, para todo o $x \in]-1, +\infty[$, temos

$$\psi'(x) = \ln(x+1) + C_1.$$

A condição $\psi'(0) = 1$, resulta em $C_1 = 1$. Usando primitivação por partes (verifique!) temos

$$P\left(\ln(x+1) + 1\right) = (x+1)\ln(x+1),$$

ou seja $\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) + C_2$. Dado que $\psi(0) = 1$, obtém-se o resultado

$$\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) + 1.$$

14.

a) $e^x(e^x + x - 1) - e^{2x}/2$,

b) $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)/2$,

c) $-e^{-x^2}(x^2+1)/2$,

d) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$,

e) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)$

f) $\frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x - x/4 - x^3/12$,

g) $\frac{2}{3}x^3\sqrt{1+x^3} - \frac{4}{9}(1+x^3)^{3/2}$,

h) $x \ln|1/x + 1| + \ln|x+1|$,

i) $\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}x^2 \ln x + \frac{2}{27}x^3$,

j) $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$,

k) $-\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$,

l) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\ln(\operatorname{tg} x) - x$,

m) $-(1-x^2)^{3/2}\arcsin x + x - x^3/3$,

n) $-\dfrac{\ln x}{1+x} + \ln\left|\dfrac{x}{1+x}\right|$,

o) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} x\cos x + \operatorname{ch} x \operatorname{sen} x)$,

p) $\dfrac{1}{1+\ln^2 3}3^x(\operatorname{sen} x + \ln 3\cos x)$,

q) $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x))$,

r) $-\frac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

15.

a) $P(xe^x) = xe^x - P(e^x) = (x-1)e^x$,

b) $$P(x \operatorname{arctg} x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - P\left(\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}P\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x\right),$$

c) $P(\operatorname{arcsen} x) = x\operatorname{arcsen} x - P\left(x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$,

d) $P(x\operatorname{sen} x) = -x\cos x + P(\cos x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x$,

e) $P(x^3 e^{x^2}) = P(x^2 \cdot xe^{x^2}) = x^2\frac{e^{x^2}}{2} - P\left(2x\frac{e^{x^2}}{2}\right) = (x^2-1)\frac{e^{x^2}}{2}$,

f) $P(\ln^3 x) = x\ln^3 x - P(3\ln^2 x) = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x) + P(6\ln x) =$

$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x) - P(6) = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$,

g) $P(x^n \ln x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - P\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$,

h) $P\left(\frac{x^7}{(1-x^4)^2}\right) = P\left(x^4\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\right) = x^4\frac{1}{4(1-x^4)} - P\left(4x^3\frac{1}{4(1-x^4)}\right) = \frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4}\ln(1-x^4)$.

17. c) $P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right) = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x$.

19. a) Fazendo a substituição $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$, com $x > 0$, $x \neq 16$, e $t > 0$, $t \neq 4$, temos

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right) = P\left(\frac{1+t}{t^2(4-t)}2t\right) = 2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2+2t}{t(4-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{4-t}$$

temos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{2}$, logo

$$2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{t} + \frac{5}{4-t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{(4-t)^5}\right|$$

e assim,

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right|.$$

b) Fazendo a substituição $\sqrt[4]{1+x} = t \Leftrightarrow x = t^4 - 1$, com $x > -1$ e $t > 0$, temos

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = P\left(\frac{1}{(t^4-1)t}4t^3\right) = P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{4t^2}{t^4-1} = \frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

temos $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$. Logo,

$$P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right) = P\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\operatorname{arctg} t$$

e assim,

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x}.$$

c) Fazendo a substituição $e^{2x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln t$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, temos

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = P\left(\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)2t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, logo

$$P\left(\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\right) = P\left(-\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

e assim,

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right|.$$

d) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, com $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $t > 0$, $t \neq 1$, temos

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = P\left(\frac{t^3}{(1+t^2)(t-1)^2}\,\frac{1}{t}\right) = P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = D = \frac{1}{2}$, logo

$$\begin{aligned} P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right) &= \frac{1}{2}P\left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} \end{aligned}$$

e assim

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = -\frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x-1}.$$

e) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+\setminus\{1, e\}$ e $t \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, temos

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = P\left(\frac{2t-1}{e^t t(t-1)^2}\,e^t\right) = P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2t-1}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

temos $A = -1$, $B = C = 1$, logo

$$P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right) = P\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - \frac{1}{t-1}$$

e assim

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = \ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

f) Fazendo a substituição $\operatorname{sen} x = t \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} t$, obtem-se (verifique)

$$P\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|.$$

g) $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)$, h) $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}$, i) $2\sqrt{x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$,

j) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$,

k) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| - \frac{1}{2(1+e^x)}$, l) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$,

m) $\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{tg} x + 1|$, n) $\ln|\ln x - 1| - \frac{1}{\ln x - 1}$, o) $3\ln(\sqrt[3]{x}+1)$.

20.

a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|$, b) $\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$, c) $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$,

d) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$, e) $-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)^{3/2}$, f) $-2\operatorname{arcsen}\sqrt{1-e^x}$,

g) $-x + \operatorname{tg} x + \sec x$, h) $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$, i) $\ln\left|\dfrac{1+2\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|$,

j) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \dfrac{1}{4(1-\operatorname{sen} x)} - \dfrac{1}{4(1+\operatorname{sen} x)} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}$

$= \dfrac{1}{2}\ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + \dfrac{1}{2}\sec x\operatorname{tg} x$, k) $\ln|x + \sqrt{x^2+1}|$,

l) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right|$, m) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|$, n) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|$,

o) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2} + \dfrac{x}{2}\right| + \dfrac{x}{4}\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2}$,

p) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \dfrac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$.

22. a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$, com $c \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8} + c$, logo $c = -\frac{\pi^2}{8}$.

    b) $g(x) = \frac{1}{2}\ln|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}| + c$, para $x > 16$ (Ex. 19.a)); $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, logo não existe g nas condições do enunciado.

23. (ver Ex. 19.c))

24. $\ln(1 + e^{-x}) + \frac{\pi}{2}$.

25. a) $\frac{1}{2}x|x|$,

    b) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$, (por partes, por ex.)

    c) $\frac{x}{2}\operatorname{sen}(\ln x + 1) - \frac{x}{2}\cos(\ln x + 1)$, (por partes, por ex.)

    d) $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$,

    e) $\frac{2}{3}x^{3/2}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln(1+x)$, (por partes, por ex.)

    f) $-\ln x + 2\ln|1 + \ln x| + \frac{\ln^2 x}{2}$, (substituição $t = \ln x$, por ex.)

    g) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}\ln(e^{2x} - 2e^x + 2)$, (substituição $t = e^x$, por ex.)

    h) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x} + 1)$, (substituição $t = \sqrt{x}$, por ex.)

    i) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x$,

    j) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x$,

    k) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x$,

    l) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)^2}\right|$,

    m) $\frac{1}{2}\ln^2(\ln x)$,

    n) $x\ln(x + \sqrt{x}) - x + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})$, (substituição $t = \sqrt{x}$ e por partes, por ex.)

    o) $-\left(\frac{1}{x} + 1\right)e^{\frac{1}{x}}$, (por partes, por ex.)

    p) $\operatorname{sen} x\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$,

    q) $\ln x\ln(\ln x) - \ln x$,

    r) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$,

    s) $2\sqrt{1+x}(\ln(1+x) - 2)$,

    t) $\ln|\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}|$,

    u) $-\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \ln|\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}|$,

    v) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos x\right)$,

    w) $-\frac{1}{2}\ln^2(\cos x)$,

    x) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\right|$ (substituição $t = \sqrt{x+2}$, por ex.),

y) $x(\operatorname{arcsen} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - 2x$ (por partes, por ex.),

z) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2(1-\operatorname{sen} x)}$ (substituição $t = \operatorname{sen} x$, por ex.).

5 Cálculo Integral (Soluções)

5.1 Definição e propriedades do integral

1. (a) Seja $d = \{0 = t_0, ..., t_n = 2\}$ uma decomposição de $[0, 2]$. Podemos assumir que $1 \in d$ (caso contrário, toma-se $d' = d \cup \{1\}$, e tem-se $S_{d'}(f) \leq S_d(f)$, $s_{d'}(f) \geq s_d(f)$). Seja $1 = t_k$, para algum $k \in \{1, ..., n-1\}$. Tem-se então, escrevendo $M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$,

$$M_i = 1,\ 1 \leq i \leq k-1, \quad M_k = 2, \quad , M_i = 3,\ k+1 \leq i \leq n,$$

$$m_i = 0,\ 1 \leq i \leq k, \quad m_{k+1} = 2, \quad , m_i = 3,\ k+2 \leq i \leq n.$$

As somas superior e inferior ficam:

$$\begin{aligned} S_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_{k-1} - t_{k-2}) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_{k+1} - t_k + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_{k-1} - t_0) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_n - t_k) \\ &= t_{k-1} + 2(1 - t_{k-1}) + 3(2 - 1) = 5 - t_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_k - t_{k-1}) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_{k+2} - t_{k+1} + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_k - t_0) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_n - t_{k+1}) \\ &= t_k + 2(t_{k+1} - 1) + 3(2 - t_{k+1}) = 5 - t_{k+1}. \end{aligned}$$

Como $1 = t_k \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$, escrevendo $t_{k-1} = 1 - \varepsilon_1$, $t_{k+1} = 1 + \varepsilon_2$, com $1 > \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ arbitrários, temos

$$S_d(f) = 5 - t_{k-1} = 4 + \varepsilon_1 \geq 4, \qquad s_d(f) = 5 - t_{k+1} = 4 - \varepsilon_2 \leq 4.$$

(b) Na alínea anterior vimos que dados $1 > \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ arbitrários, existe d tal que

$$S_d(f) = 4 + \varepsilon_1, \qquad s_d(f) = 4 - \varepsilon_2.$$

Conclui-se então que

$$\overline{\int_0^2} f = \inf\{S_d(f) \ : \ d \text{ decomposição de } [0,2]\} \le \inf_{1>\varepsilon_1>0} (4+\varepsilon_1) = 4,$$

$$\underline{\int_0^2} f = \sup\{S_d(f) \ : \ d \text{ decomposição de } [0,2]\} \ge \sup_{1>\varepsilon_2>0} (4-\varepsilon_2) = 4.$$

Logo, temos $4 \le \underline{\int_0^2} f \le \overline{\int_0^2} f \le 4$, ou seja, $\underline{\int_0^2} f = \overline{\int_0^2} f = 4$. Assim, f é integrável com $\int_0^2 f = 4$.

2. (a) Seja $f \ge 0$. Para cada decomposição $d = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se neste caso

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S_d(f^2) - s_d(f^2) &= \sum_{i=1}^n (M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &\le 2M \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)), \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ aribtrário, como f é integrável, podemos escolher a decomposição d tal que $S_d(f) - s_d(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$S_d(f^2) - s_d(f^2) < \varepsilon.$$

Conclui-se que f^2 é integrável para $f \ge 0$ integrável.

Para f arbitrária, como f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

(b) De $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que fg é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. (a) Temos que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = b = \sup_{x\in[a,b]} x$, para quaisquer $a,b \in [0,1]$. Logo, para qualquer decomposição do intervalo $[0,1]$, temos $S_d(f) = S_d(x)$ e assim

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf S_d(f) = \inf S_d(x) = \overline{\int_0^1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx = 1/2,$$

já que x é integrável.

(b) Por outro lado, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$, já que $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = 0$, para quaisquer $a,b \in [0,1]$, logo

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$$

e assim f não é integrável.

4. (a) É imediato da definição que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, $k \geq 2$, $f(\frac{1}{k}^-) = \frac{1}{k}$ e $f(\frac{1}{k}^+) = \frac{1}{k-1}$. Logo, f não é contínua em $\frac{1}{k}$.

(Já agora: f é contínua em qualquer $x \neq \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, à esquerda em 1 e à direita em 0 - mais difícil!)

(b) Seja $x \in]0,1[$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Se $y > x$ então:

– se $y \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, então $f(x) = f(y) = \frac{1}{k}$.

– caso contrário, $y \in \left]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$, com $l < k$, já que $y > x$. Logo $f(y) = \frac{1}{l} > \frac{1}{k} = f(x)$.

Em qualquer dos caso, $f(y) \geq f(x)$ e f é monótona crescente (não estritamente). É integrável já que qualquer função monótona (em $[a,b]$) é integrável (em $[a,b]$).

7. Se f é contínua em $[a,b]$ e $c \in]a,b[$ com $f(c) > 0$, então $f(x) > 0$ numa vizinhança $I = V_\epsilon(c) \subset [a,b]$ e portanto $\int_I f(x)dx > 0$. Então, $\int_a^b f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_{[a,b]\setminus I} f(x)dx \geq \int_I f(x)dx > 0$, onde se usou que $f \geq 0$. Se $c = a$ ou $c = b$, é análogo.

8. Se, por contradição, $f(x) = 0$ não tivesse raizes, segue da continuidade de f e do Teorema do Valor Intermédio que f não muda de sinal em $[a,b]$. Mas se $f > 0$ em $[a,b]$, da monotonia do integral e do Ex. anterior tem-se $\int_a^b f(x)dx > 0$, o que é impossível. Da mesma forma, não pode ser $f < 0$ em $[a,b]$. Conclui-se que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

10. Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum a, como f é contínua, seria $f(x) > f(a)/2 > 0$ em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, para algum $\varepsilon > 0$. Da monotonia do integral, $\int_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[} f(t)\,dt > \varepsilon f(a) > 0$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Alternativamente, tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo), temos

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

11. Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass será limitada em $[a,b]$, ou seja, existem m e M tais que $m \le f(x) \le M$ em $[a,b]$. Pela monotonia do integral:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

Por outro lado, se $g \geq 0$, temos $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Se $\int_a^b g(x)dx = 0$, o resultado é válido para qualquer $c \in]a,b[$; para $\int_a^b g(x)dx > 0$ temos:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, de novo porque f é contínua, f assume em $]a,b[$ todos os valores entre m e M, logo existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

1. a) $\operatorname{sen} x^2$, b) $-\cos x^2$. c) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$. d) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$. e) $4x^3\operatorname{sen}(x^2) - 2x\operatorname{sen}(|x|)$, f) $\int_1^{x^2}\cos(\sqrt{t})\,dt + 2x^2\cos|x|$.

2. Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ também será e

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' = \left(-x^2\int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' \\ &= 2x\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

3. Como f é contínua e $t \mapsto x - t$ é contínua, $(x-t)f(t)$ é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ é diferenciável com

$$\psi'(x) = \left(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

De novo porque f é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ' é diferenciável, ou seja, ψ é duas vezes diferenciável, e

$$\psi''(x) = f(x).$$

4. Como f é diferenciável, e portanto contínua, podemos derivar ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = (xf(x))' \Leftrightarrow f(x) = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que $f'(x) = 0$, para $x \neq 0$, ou seja, f é constante em $]0,+\infty[$ e em $]-\infty,0[$. Como é contínua, tem-se que f é constante em $\mathbb{R}$.

5.

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' &= \left(\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \int_0^{-\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\operatorname{sen} x \\ &= \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = 0.\end{aligned}$$

6. Temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$ a que se pode aplicar a Regra de Cauchy. Do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

7. a) O limite é uma indeterminação que pode ser levantada usando a regra de Cauchy. O cálculo da derivada da função que envolve um integral é consequência do teorema de derivação da função composta e do teorema fundamental do cálculo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{1/x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right).\end{aligned}$$

b) Da mesma forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3}(e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot x^2e^x}{3x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3(e^x-1)} = \frac{2}{3}.$$

8. (a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.

   (b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, F é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt \\ &> \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}(x-M). \end{aligned}$$

   Como $\int_0^M f(t)\,dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty} \frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
   Considere:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \le 1. \end{cases}$$

   Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \le 1 \end{cases}$$

   temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

9. F é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma vez que é o produto de duas funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\frac{1}{x}$ e $\int_0^x f(t)\,dt$ (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = F(0)$$

   uma vez que f é contínua em 0 (onde se usou a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo). Logo, F é contínua em 0. Em relação à diferenciabilidade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t) - xf(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{2x}$$

   onde se usou de novo a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo. O limite acima existe sse f é diferenciável em 0 (e neste caso teríamos $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$).

10. (a) f é integrável em $[-1,1]$ por que é contínua excepto num conjunto singular e é limitada (mais precisamente: é integrável em $[-1,0]$ e em $[0,1]$ já que em qualquer desses intervalos coincide com uma função contínua, a menos possivelmente de -1 e 1, respectivamente). Logo é integrável em qualquer intervalo da forma $[0,x]$ e $[-x,x]$, para $x \in [-1,1]$.

    (b) Usando a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+)$$

    e da mesma forma $F'_e(0) = f(0^-)$. Conclui-se que se $f(0^+) \neq f(0^-)$ então F não é diferenciável em 0.

    (c) Temos $G(x) = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = -F(-x) + F(x)$. Usando a regra de Cauchy, o Teorema Fundamental do Cálculo e $y = -x$:

$$G'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-F(-x) + F(x)}{x} = \lim_{y\to 0^-} f(y) + \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^-) + f(0^+).$$

    Da mesma forma se vê que $G'_e(0) = f(0^-) + f(0^+) = G'_d(0)$, logo G é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

12. Da continuidade de u e v, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar os seus integrais indefinidos e temos então

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt \Rightarrow \left(\int_a^x u(t)\,dt\right)' = \left(\int_b^x v(t)\,dt\right)' \Leftrightarrow u(x) = v(x).$$

    Por outro lado, fazendo $x = b$, tem-se

$$\int_a^b u(t)\,dt = \int_b^b v(t)\,dt = 0.$$

14. a) Como a função integranda $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t^2}$ é contínua o integral existe qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Como a função integranda é positiva e $x \mapsto x^2$ é estritamente crescente para $x > 0$ o integral é estritamente crescente para $x \geq 0$. Como a função é par é estritamente decrescente para $x \leq 0$. (Alternativamente, justifique os resultados de monotonia derivando o integral usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta; obtém-se $f'(x) = 2xe^{x^4}$ e as mesmas conclusões seguem com facilidade.)

    b) Como $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \ni t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ é ilimitada numa qualquer vizinhança direita de 1 o integral não está definido se $e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$. O integral está definido para $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ pois a função integranda é nesse caso contínua no intervalo fechado definido pelos extremos do intervalo de integração. Para $x > 0$:

$$g'(x) = e^x \frac{1}{\ln e^x} = \frac{e^x}{x} > 0$$

pelo que a função g é estritamente crescente. Um zero óbvio de g corresponde aos extremos de integração serem iguais, isto é $x = \ln 2$, sendo portanto $g(x) < 0$ se $x < \ln 2$ e $g(x) > 0$ se $x > \ln 2$.

c) Temos $h(x) = x \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt - \int_1^x te^{t^2}\, dt$. As funções integrandas $t \mapsto e^{t^2}$ e $t \mapsto te^{t^2}$ são contínuas logo podemos derivar h usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra de derivação do produto:

$$h'(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt + xe^{x^2} - xe^{x^2} = \int_1^x e^{t^2}\, dt.$$

Como $e^{t^2} > 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $h'(x) > 0$ para $x > 1$ e $h'(x) < 0$ para $x < 1$, ou seja, h é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $] - \infty, 1[$, tendo um mínimo no ponto 1.

15. a) Note-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de f em qualquer intervalo limitado sendo os integrais de $\tilde{f}$ e f iguais.

b)

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x f = \frac{d}{dx} \int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

Note-se que a não continuidade de f não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de f e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.

16. a) Note-se que a função integranda é não negativa e contínua. Segue-se que o integral vai ser positivo se $x > x^2$ (isto é $x \in]0, 1[$), negativo se $x < x^2$ (isto é $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$), e nulo se $x = x^2$ (isto é $x \in \{0, 1\}$).

b) Da alínea anterior decorre que basta estimar o integral para $x \in]0, 1[$. Para tal note-se que se $x \in]0, 1[$ o intervalo de integração está contido no intervalo $[0, 1]$ e aí a função integranda pode ser majorada por $\frac{t}{1+t^2}$. O cálculo do integral desta última função entre x^2 e x conduz então à majoração pretendida.

17. (a) Uma vez que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, logo contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da derivada da função composta que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = f(x^2 - 4x + 3)(2x - 4).$$

Como $f < 0$ em $\mathbb{R}$, tem-se $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$. Logo, g é crescente para $x < 2$, decrescente para $x > 2$ e assim g terá um ponto de máximo em 2. Não tem mais pontos de extremo uma vez que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a derivada só se anula em 2.

Dado que $f < 0$, tem-se

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 3,$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

e

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 3.$$

Para a concavidade:

$$g''(x) = f'(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)^2 + 2f(x^2 - 4x + 3) < 0,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, uma vez que f e f' são negativas. Conclui-se que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

(b) Há dois aspectos a verificar. Por um lado, g é majorada porque é contínua e tem um único ponto de máximo em 2, logo $g(x) \leq g(2)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, para qualquer $x > 3$ temos $x^2 - 4x + 3 > 0$. Segue da monotonia do integral e de f ser decrescente, uma vez que $f' < 0$, que $f(t) \leq f(0)$, para $0 < t < x^2 - 4x + 3$ e que

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt \leq \int_0^{x^2-4x+3} f(0)\,dt = f(0)(x^2 - 4x + 3).$$

Logo, como $f(0) < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f(0)(x^2 - 4x + 3) = -\infty,$$

e g não é minorada.

5.3 Regra de Barrow (Sols.)

1. a) $\ln 2$. b) $\ln(1/2)$. c) 0 d) 0.

2. a) $\ln\sqrt{\frac{2}{e}}$. b) $\frac{\ln 2}{4}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\operatorname{arctg}(3/4)$.
e) $\frac{1}{8}(\pi + \log 4)$ (subst. $t = \operatorname{tg} x$). f) $\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{note que } \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}\right)$.

3. a) $$\int_1^\pi x \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_1^\pi$$

$$= \frac{\pi^2+1}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

b) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

c) $$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$

$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

d) $$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx = \left[\ln|x-3|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$$

e) $$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx = \int_2^4 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{80}{3} + \ln 3.$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}}\, dt = \int_1^e \frac{1}{x+x^2}\frac{1}{x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx,$ fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Tem-se

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

(verifique) e portanto

$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx = -1 - \frac{1}{e} + \ln(1+e) + 0 + 1 - \ln 2 = -\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{2} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} dx$

$\displaystyle= 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sqrt{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x)\, dx$

$\displaystyle= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{\frac{7}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}.$

i) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, temos $x = 0 \Leftrightarrow t = e^0 = 1$ e $x = 1 \Leftrightarrow t = e$, logo

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^e -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} dt = [-\ln|1+t| + \ln|t|]_1^e$

$= -\ln(1+e) + 1 + \ln 2.$

4. $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt$. Fazendo a mundança de variável $u = \frac{1}{t}$, tem-se

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt = \int_1^x u e^{\left(\frac{1}{u}+u\right)} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_1^x \frac{1}{u} e^{\frac{1}{u}+u}\, du = -F(x).$$

5. Considerando a mudança de variável sugerida

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\, dt = \frac{1}{x}\int_1^{\frac{1}{x}} f(y)\, dy.$$

que se pode diferenciar usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta.

6. Use a mudança de variável $y = 1/x$.

7. Uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = e^{-x^2}$, usando integração por partes temos

$$\int_0^1 F(x)\, dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 x e^{-x^2} dx = F(1) + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.$$

8. a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\, dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que f é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! é necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se F é uma primitiva de f e é periódica de período T, temos

$$\int_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo F é periódica de período T.

9. (a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como x e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Fazendo a mudança de variável $u = -t$ temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-1)\,du \\ &= \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u}\,du = f(x). \end{aligned}$$

Logo f é par,

(b) f é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_a^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_a^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \\ &= \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, \end{aligned}$$

em que tomamos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

(c) Como cos é decrescente em $]0, \pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja f é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$. Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leq \int_x^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_x^{3x} = \ln 3.$$

Logo f é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset]0, +\infty[$.
Conclui-se que existe $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Como f é par, existe também $f(0^-) = f(0^+)$, logo existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

10. (a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\,dt = \int_0^x \phi(-u)(-1)\,du = -g(x)$, notando que ϕ é par.

(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2.}$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$.)

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como g é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que g é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + \frac{2}{a} \leq g(a) + \frac{2}{a}.$$

11. a)
$$\phi(2) = \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t\,dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \ln t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)}\,dt$$
$$= -\frac{\ln 2}{10} + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{13}{20}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5.$$

b) $\phi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln x$, para $x > 0$.

c) Tem-se $\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, ϕ é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]0, 1[$.

Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de ϕ' entre 1 e c. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de ϕ.

12. a) $A = 2\displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (9 - x^2 - x^2)\,dx = 18\sqrt{2}$,

b) $A = 2\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{2(2-x)} - \sqrt{4(1-x)}\right) dx + 2\int_1^2 \sqrt{2(2-x)}\,dx$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{2(2-x)}\,dx - 2\int_0^1 \sqrt{4(1-x)}\,dx = \frac{8}{3}$$

c) $A = \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{-x}{8}\right) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-27x - \frac{-x}{8}\right) dx = \frac{15}{4}$,

d) $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{12}$,

e) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2)\,dx = \frac{7}{48}$,

f) $A = \displaystyle\int_0^1 e^x - (1-x)\,dx = e - \frac{3}{2}$.

g) $A = \displaystyle\int_0^{e-1} 2\ln(1+x)\,dx = [2x\ln(1+x)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\,dx$

$= 2(e-1) - 2\displaystyle\int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{x+1}\,dx = 2(e-1) - 2\,[x - \ln|x+1|]_0^{e-1} = 2(e-1) - 2(e-1) + 2 = 2$.

h) Os pontos de intersecção são em $x = 1$ e $x = -1$ e, em $[-1,1]$, $\ln(1+x^2) \leq \ln 2$, logo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \ln 2 - \ln(1+x^2)\,dx = 2\int_0^1 \ln 2 - \ln(1+x^2)\,dx \\ &= 2\ln 2 - 2[x\ln(1+x^2)]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx \\ &= 2\ln 2 - 2\ln 2 + 4\int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = 4[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

13. a) $\frac{1}{3}$

b) $\int_0^1 (4x - x)\,dx + \int_1^2 (4x - x^3)\,dx = \frac{15}{4}$.

c) $a(\ln a - 1) + 1$,

d) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3-e^x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{3-y}\,\frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{3}\ln 2$ (fazendo $y = e^x$).

e) $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2y}{(y^2+1)y}\,dy = [2\operatorname{arctg} y]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{12}$ (fazendo $y = \sqrt{x+2}$).

f) $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{\pi}{4}$ (fazendo $y = \ln x$).

14. De $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ temos $y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x=2\operatorname{sen} t$):

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t+1)\,dt = 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

15. As duas curvas intersectam-se em $(-1,\sqrt{3})$ e $(-1,\sqrt{3})$. Temos

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(Faça a substituição $x=2\operatorname{sen} t$ para primitivar $\sqrt{4-x^2}$).

16. $A=\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$

17. $A=\displaystyle\int_0^1\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{16}x^2\right)dx+\int_1^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{3}.$

18. As curvas intersectam-se nos pontos $(1,0)$ e $(e,1)$, e para $x\in[1,e]$, $\ln x\geq \ln^2 x$. Temos

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e\left(\ln x-\ln^2 x\right)dx=\left[x\left(\ln x-\ln^2 x\right)\right]_1^e-\int_1^e x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\ln x\right)dx \\ &= e(1-1)-1(0-0)-[x]_1^e+\int_1^e 2\ln x\,dx \\ &= -e+1+[2x\ln x]_1^e-\int_1^e 2\,dx = 3-e. \end{aligned}$$

6 Séries (Soluções)

6.1 Séries Numéricas (Soluções)

2. Por exemplo, para a): de 1.2.15 a) temos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Da definição de série numérica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

As outras alíneas fazem-se de forma semelhante (usando 1.2.15 e), f), h) i)).

3. a) diverge, o termo geral não tende para 0;

   b) série geométrica de razão $\frac{e}{\pi^2}$, converge uma vez que $\left|\frac{e}{\pi^2}\right| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{\pi^2-e}$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ é uma série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \frac{1}{n+1}$, logo converge e $s = a_1 - \lim a_n = \frac{1}{2}$;

   d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, é uma série de Mengoli da forma $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n-1}$, logo converge com $s = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - 2\lim a_n) = \frac{3}{4}$;

   e) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = -\sqrt{n}$, logo diverge, uma vez que (a_n) diverge;

   f) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \sqrt[n]{n}$, logo converge, uma vez que (a_n) é convergente, com $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, e $s = 1 - 1 = 0$.

   g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \pi^{-n+2} = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n$, série geométrica de razão $-\frac{1}{\pi}$, converge, porque $\left|-\frac{1}{\pi}\right| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{1-\pi}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, converge uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{3}{4} < 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4}$, e $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$. A soma é $s = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) - \ln(n+1)$, série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \ln(n)$, logo diverge, uma vez que (a_n) diverge;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}} = \frac{e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$, série geométrica de razão $\frac{-2}{e}$, logo converge porque $\left|-\frac{2}{e}\right| < 1$, e $s = -\frac{e}{e+2}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, logo converge com $s = a_1 - \lim a_n = 1$.

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ diverge, uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$ diverge por ser uma série geométrica de razão $\frac{4}{3} > 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{1}{3} < 1$. (Alternativamente: diverge uma vez que o seu termo geral não converge para 0.)

m) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n!}$, logo converge com $s = a_1 + a_2 - 2\lim a_n = \frac{3}{2}$;

n) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)2^{-n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, converge uma vez que$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 \leq \frac{1}{2} < 1$, e $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2}$, e $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. A soma é $s = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$;

o) É uma série de Mengoli da forma $\sum_{n=1} a_{n+1} - a_n$, com $a_n = \operatorname{arctg}(n)$, logo converge uma vez uma vez que $a_n \to \frac{\pi}{2}$, e a sua soma é $s = \lim a_n - a_1 = \frac{\pi}{4}$.

p) Diverge, uma vez que o seu termo geral não converge para 0.

4. Divergentes: a), b), d), f), h), i) j), l)

   Convergentes: c), e), g), k).

5. Divergentes: c), f), g) se $a \geq b$,

   Convergentes: a), b), d), e), g) se $a < b$.

6. a) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparemos com a série $\sum \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ a qual é divergente. Como,

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1(\neq 0, +\infty) \qquad \text{(verifique)}$$

concluimos que a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza. Logo a série dada é divergente.

b) Trata-se de uma série de termos positivos. Usando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{2^n}{n^2+n!}} = \frac{2(n^2+n!)}{(n+1)^2+(n+1)!} = 2\frac{n!}{(n+1)!}\frac{\frac{n^2}{n!}+1}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}+1} \to 2\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Como este limite é menor que 1, concluimos que a série dada é (absolutamente) convergente.

c) Procedendo como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n^3}$. Logo, é convergente.

d) Trata-se de uma série de termos positivos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

e) Como $\frac{1+2^n}{1-2^n} = \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} \to -1 \neq 0$, concluimos que a série é divergente.

f) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério da raiz (ou de Cauchy):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n} = \frac{n}{2n+\sqrt{n}} = \frac{1}{2+n^{-\frac{1}{2}}} \to \frac{1}{2}.$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

g) Comece por reparar que, contrariamente a e), a sucessão do termo geral desta série converge para 0 o que não nos permite tirar qualquer conclusão sobre a convergência ou divergência da série. Tratando-se de uma série de termos não negativos, podemos tentar usar o critério de d'Alembert:

$$\frac{\frac{1+2^{n+2}}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}} = \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = \frac{2^{-(n+1)}+2}{2^{-(n+1)}+1}\frac{3^{-n}+1}{3^{-n}+3} \to \frac{2}{3}.$$

Como este limite é inferior a 1 a série é absolutamente convergente. (Alternativamente: usar o critério geral de comparação com $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$.)

h) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Como este limite é superior a 1 concluimos que a série é divergente.

i) Como em h), a série converge.

j) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$. Logo, é divergente.

k) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, é divergente.

l) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1000)^n}{n!}} = \lim 1000 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Como este limite é inferior a 1, a série é convergente.

m) Repare-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ é uma série de termos negativos. Consideramos a série $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{3^n-n^2}$, que é uma série de termos positivos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}-n-1}{3^{n+1}-(n+1)^2}}{\frac{2^n-n}{3^n-n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

(verifique), logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{3^n-n^2}$ converge, e também converge (absolutamente) a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$.

n) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1.$$

Logo, a série é convergente.

o) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg} n \frac{n^2}{n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \neq 0, \infty.$$

Logo, as séries têm a mesma natureza, ou seja, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$ é convergente.

p) Temos

$$\lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como o termo geral não converge para 0, a série diverge.

q) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries têm a mesma natureza, ou seja, convergem.

r) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln n} \to +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

7. a) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;
   b) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
   c) converge - critério d'Alembert;
   d) diverge - o termo geral não tende para 0;
   e) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
   f) converge - critério d'Alembert;
   g) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
   h) converge - critério d'Alembert;
   i) diverge - o termo geral não tende para 0;
   j) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$;
   k) diverge - critério d'Alembert;
   l) converge - $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^3}$, comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

8. a) diverge - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – série harmónica; b) diverge - o termo geral não converge para 0; c) converge - critério da raiz.

9. a) i) Temos que $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$, é uma função crescente e positiva, e que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} [\ln |\ln x|]_2^b = \lim_{b \to +\infty} \ln |\ln b| - \ln |\ln 2| = +\infty.$$

Logo, do critério do integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

ii) Como em i) (neste caso, a série converge).

iii) Temos $\frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$. Logo, como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, do critério geral de comparação, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ também converge.

iv) Temos

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \to +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

10. a) Para $a_n \geq 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são de termos não negativos, já que se $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, então $f(x) > 0$ em $]0, a[$ para algum $a > 0$, logo $f(a_n) > 0$. Como $a_n \to 0^+$, tem-se

$$\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0.$$

Como $L \neq 0, +\infty$, segue do critério geral de comparação que $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem sse $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

11.
- $\sum(1 + a_n)$ diverge, uma vez que $1 + a_n > 1$, logo o termo geral não converge para 0.
- $\sum \frac{1}{n^2+a_n}$ converge, uma vez que $\frac{1}{n^2+a_n} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente.

12. a) se (b_n) é limitada, com $|b_n| < c$, então $|a_n b_n| < c|a_n| = ca_n$, logo pelo critério geral de comparação, $\sum a_n b_n$ converge (absolutamente).

b) se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$, logo (a_n) é limitada, e por (a), também converge $\sum a_n^2$.

c) com $a_n = \frac{1}{n}$, tem-se $\sum \frac{1}{n}$ divergente e $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

13. a) O termo geral da série é uma sucessão divergente já que possui dois sublimites diferentes: 1 e -1. Logo, como o termo geral da série não tende para 0 concluimos que a série é divergente.

b) Comece por observar que, contrariamente ao caso anterior, a sucessão do termo geral da série converge para 0 o que não nos permite tirar nenhuma conclusão sobre a convergência da série. Observe igualmente que não se trata de uma série de termos não negativos pelo que os critérios anteriormente usados para esse tipo de séries (comparação, d'Alembert, Cauchy) não podem ser directamente aplicados aqui. Estudemos a série de módulos correspondente. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{n^3+2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+2},$$

por comparação desta série de termos positivos com a série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ concluimos que esta série é convergente e, portanto a série dada é absolutamente convergente.

c) Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{3000}}{3^n}$, que é convergente (usando o Critério d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3} < 1$).

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Consideremos a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, e comparêmo-la com a série divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} \to \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$$

logo a série de módulos considerada é também divergente. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Tratando-se de uma série alternada tentemos usar o critério de Leibniz: considere-se a série dada na forma $\sum (-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > 0$. Como

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

o que mostra que a sucessão de termo geral a_n é decrescente, e como $a_n \to 0$, podemos concluir, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

Uma observação: o critério de Leibniz só decide da convergência de uma série, nada dizendo sobre a convergência ser simples ou absoluta. O resultado anterior foi obtido depois de termos verificado previamente que a convergência não poderia ser absoluta.

e) É uma série alternada. Considerando a série dos módulos correspondente $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, vemos que será divergente, uma vez que

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e portanto a série dos módulos tem a mesma natureza que a série harmónica. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Escrevendo a série dada na forma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, temos que $a_n \to 0$ e a_n é decrescente, uma vez que a função $\operatorname{sen} x$ é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Do critério de Leibniz, a série dada converge. Logo, a série é simplesmente convergente.

f) g) h) i) l) simplesmente convergentes, j), k) absolutamente convergentes.

14. a) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\,\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

b) É simplesmente convergente (proceder como em a)).

c) É divergente: o termo geral tem dois sublimites 1 e -1, logo é divergente. Como o termo geral não converge para 0, a série é divergente.

d) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.

6.2 Séries de potências (Soluções)

1. a) Temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{x}{2}$. Logo, converge absolutamente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e diverge para $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ é uma série de potências, centrada em -2, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{(n+3)2^{n+1}}} = \lim \frac{2(n+3)}{(n+2)} = 2.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ e divergente para $|x+2| > 2 \Leftrightarrow x < -4 \wedge x > 0$. Para $|x+2| = 2$, temos:

- Se $x = 0$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, que é divergente por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = -4$: obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente é divergente, logo esta série não é absolutamente convergente. No entanto, aplicando o critério de Leibniz, como $0 < \frac{1}{n+2}$ é decrescente, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é convergente, logo converge simplesmente.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ converge absolutamente para $x \in]-4, 0[$, converge simplesmente para $x = -4$ e diverge para $x \in]-\infty, -4[\cup [0, +\infty[$.

c) Faça-se $y = (2x)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Esta é uma série de potências cujo raio de convergência e dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1$ e divergente para $|y| > 1$. Se $y = 1$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, esta série tem a mesma natureza que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Se $y = -1$, obtemos a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dado que $\frac{1}{n+1} \to 0$ e que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, deduz-se, aplicando o critério de Leibniz, que a série é convergente. Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ e já vimos que esta série é divergente, concluimos que para $y = -1$ a série é simplesmente convergente. Então, como

$$|y| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |(2x)^3| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{2},$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2},$$

concluimos que a série de potências dada é absolutamente convergente se $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x = -\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n}$, fazendo $y = -4x$. É uma série de potências com raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ e divergente para $|y| > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{4}$. Para $|y| = 1$, temos:

- Se $x = -\frac{1}{4}$: obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ que é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = \frac{1}{4}$: obtemos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente diverge, portanto a série não converge absolutamente. Do critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{2n} \to 0$ e é decrescente, a série converge, e portanto converge simplesmente.

  Conclui-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ converge absolutamente se $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, converge simplesmente para $x = \frac{1}{4}$ e diverge se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$ é uma série de potências, centrada em 0, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Uma vez que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

  concluimos que a série diverge uma vez que o termo geral não converge para 0.
- Se $x = -1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Já vimos que $\lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}$, logo $(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$ tem dois sublimites e^{-1} e $-e^{-1}$, e a série é portanto divergente, uma vez que o termo geral não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ converge absolutamente para $x \in]-1, 1[$ e diverge para $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$: é uma série de potências, centrada em 1, cujo raio de convergência é dado por

$$\begin{aligned} R = \lim \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} &= \lim \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)!+1}{n!+1} \\ &= \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)} = \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!+(n+1)} \\ &= \lim \frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ e divergente para $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$. Para $|x-1| = 1$, temos:

- Se $x = 2$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$, que é divergente uma vez que $\frac{n!}{n!+1} \to 1 \neq 0$.
- Se $x = 0$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{n!+1}$, que também é divergente, uma vez que $\frac{n!(-1)^n}{n!+1}$ tem dois sublimites -1 e 1, logo o termo geral da série não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$ converge absolutamente para $x \in]0,2[$ e diverge para $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

3. a) É uma série geométrica de razão $\frac{x}{x+1}$, logo converge absolutamente se $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$ e diverge se $\left|\frac{x}{x+1}\right| \geq 1$. Resolvendo em ordem a x, temos $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, ou seja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ converge absolutamente para $x > -\frac{1}{2}$ e diverge para $x \leq -\frac{1}{2}$.

   b) $R = 1$; a a série converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1$ e diverge para $x < -1 \vee x \geq 1$.

   c) o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} y^n$ é $R = 1$ e esta série converge absoutamente para $|y| < 1$, converge simplesmente para $y = -1$ e diverge para $y < -1 \vee y \geq 1$. Fazendo $y = \frac{x-2}{x}$, conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{x-2}{x}\right)^n$ converge absolutamente para $x > 1$, converge simplesmente para $x = 1$ e diverge para $x > 1$.

   d) $R = 1$; a série converge absolutamente para $-2 \leq x \leq 3$, converge simplesmente para $x = -2$ e diverge para $x < -2 \vee x \geq 4$;

   e) $R = 4$; a série converge absolutamente para $-3 \leq x \leq 5$ e diverge para $x < -3 \vee x > 5$.

4. a) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(2n+1)!}$ é $R = +\infty$, logo esta série converge absolutamente para $y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   b) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$ é $R = 1$, e esta série converge absolutamente para $-1 < y < 1$, converge simplesmente para $y = 1$ e diverge para $y \leq -1 \vee y > 1$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$ converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1 \vee x = 1$ e diverge para $x < -1 \vee x > 1$.

c) $R = 3$; a série converge absolutamente para $-2 < x < 4$, diverge se $x \leq -2 \vee x \geq 4$.

d) $R = |a|$; a série converge absolutamente para $-a - |a| < x < a - |a|$ (ou seja, para $a > 0$, $-2a < x < 0$, para $a < 0$, $0 < x < -2a$) e diverge para $x \leq -a - |a| \vee x \geq a - |a|$ (se $|x + a| = |a|$, as séries obtidas têm um termo geral que não converge para 0).

e) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2+1}$ é $R = 1$; esta série converge absolutamente para $|y| \leq 1$ e diverge para $|y| > 1$. Fazendo $y = (5x + 1)^2$, e resolvendo em ordem a x, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$ converge absolutamente para $-\frac{2}{5} \leq x \leq 0$ e diverge para $x < -\frac{2}{5} \vee x > 0$.

5. a) No ponto -3 a série dos módulos é dada por

$$\sum |a_n(-3)^n| = \sum |a_n| 3^n = \sum |a_n 3^n|$$

Como no ponto 3 a série é divergente, a série $\sum a_n 3^n$ é divergente, e $\sum |a_n 3^n|$ é também divergente. Logo a convergência em -3 é simples.

b) O raio de convergência da série é 3, uma vez que a convergência em -3 é simples (se $|x| < R$, a série converge absolutamente em x, se $|x| > R$, a série diverge em x, logo se a série converge simplesmente em x, tem-se $|x| = R$). Logo a série converge absolutamente para $|x| < 3$ e diverge para $|x| > 3$.

c) Por exemplo, $\sum \frac{1}{n3^n} x^n$.

6. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} = \frac{x^2}{x+1}$, para $|x| < 1$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$, para $|y| < 1$).

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}} = \frac{2(x-1)}{3-x}$, para $-1 < x < 3$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{x^2}{3(3-x^2)}$, para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}} = \frac{x}{4(2-x)}$, para $|x| < 2$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,3^n} x^n = e^{\frac{x}{3}}$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y$, para $y \in \mathbb{R}$).

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+1} = \operatorname{sen}(x+1)$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} = \operatorname{sen} y$, para $y \in \mathbb{R}$).

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 4^n}{(2n)!}\, x^{4n} = \cos(2x^2)$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, y^{2n} = \cos y$, para $y \in \mathbb{R}$).

6.3 Séries de Taylor (Soluções)

1. a) $e^{2x+1} = e \cdot e^{2x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e\, 2^n}{n!} x^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(0) = e\, 2^n$.

   b) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{x}{1-(-2x)} = x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n$, para $|2x| < 1$.
   Temos $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$.

   c) $\cos(x+1)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+1)^{4n}$, para $x \in \mathbb{R}$.

   Temos $f^{(4n)}(-1) = (4n)!\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $f^{(k)}(-1) = 0$, se $k \neq 4n$ (se não é múltiplo de 4).

   d) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2+(x-2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$, para $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. Logo,
$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n + C.$$
   Fazendo $x = 2$, temos $C = \ln 2$.
   Temos $f^{(n)}(0) = n!\, \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$, para $n \geq 1$ e $f(0) = \ln 2$.

   e) $\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)' = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$. Logo,
$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1} + C.$$
   Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
   Temos $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\, \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = (2n)!\, \frac{(-1)^n}{n!}$ e $f^{(2n)}(0) = 0$.

   f) Como e), notando que $\operatorname{sen} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$.

   g) $P\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{x+1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$, para $|x| < 1$. Logo,
$$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n.$$

Temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$.

h) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2+(x-1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$, para $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Temos $f^{(n)}(1) = \frac{n!(-1)^n}{2^{n+1}}$.

i) $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$, para $|y^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$. Logo,

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Temos assim para $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}.$$

Temos $f^{(4n+2)}(0) = (4n+2)!\,\frac{(-1)^n}{2n+1}$, e $f^{(k)}(0) = 0$ para $k \neq 4n+2$.

j) $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1} = 2x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$, para $-1 < x < 1$. Logo,

$$\ln(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n)}(0) = (2n)!\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com $a_0 = a_3 = 1$, $a_n = 0$, $n \neq 0, 3$, para $x \in \mathbb{R}$;

   b) Impossível, a função não está definida em 0;

   c) $\ln 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} x^n$, para $x \in]-3, 3]$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$, $x \in]-1, 1[$;

   e) Impossível, a função não está definida em 0;

   f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, $x \in]-1, 1[$;

   g) Impossível, a função não está definida em 0;

   h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$, $x \in [-1, 1]$;

   i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. a) $1 + (x-1) + (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$;
   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, $x \in]0,2[$;
   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$;
   d) $\displaystyle (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}(x-1)^n$, $x \in [0,2]$;
   e) $\displaystyle \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+2}}(n-1)(x-1)^n$, $x \in]-1,3[$;
   f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^n$, $x \in]0,2[$;
   g) Impossível, a função não está definida em 1;
   h) Impossível, a função não está definida em 1;
   i) Impossível, a função não é diferenciável em 1.

4. a) Temos
$$\frac{x^4}{1-2x} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+4} = \sum_{n=4}^{\infty} 2^{n-4} x^n,$$
para $|2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

   b) Temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e para $n \geq 4$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-4} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!\,2^{n-4}$. Como $f^{(4)}(0) = 4! > 0$, f tem um mínimo em 0.

5. $\displaystyle (x-1)e^x = (x-1)e\,e^{x-1} = (x-1)e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{(n-1)!}(x-1)^n.$

   Logo,
$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{e}{(n-1)!} \Leftrightarrow f^{(n)}(1) = n\,e.$$

6. a) A série de potências $\displaystyle\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ tem raio de convergência dado por
$$R = \lim \frac{\frac{1}{3^n\sqrt{n}}}{\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}} = 3\lim\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 3.$$

   Logo a série converge absolutamente para $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$ e diverge para $x < -2 \vee x > 4$. Em $x = 4$, obtem-se a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é uma série divergente (justifique). Em $x = -2$, obtem-se a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ que é convergente (critério de Leibniz), e a série dos módulos diverge. Logo, a série converge absolutamente para $x \in]-2,4[$.

b) $g(1) = 0$ e $\dfrac{g''(1)}{2!} = \dfrac{1}{9\sqrt{2}}$, logo $g''(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{9}$. Temos

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{3^n\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

Escrevendo $x = 1 + (x-1)$, a série de Taylor no ponto 1 de $x + g'(x)$ é

$$1 + (x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{4}{3} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{9})(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

7. Tem-se

$$(\ln(1+y))' = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n,$$

para $|y| < 1$. Primitivando obtemos

$$\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Conclui-se que, para $|x^3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, a série de MacLaurin para ϕ é:

$$\phi(x) = x\ln(1+x^3) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{3n+1}.$$

Do desenvolvimento acima temos:

$$\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 4! > 0,$$

e portanto a função tem um mínimo em 0.

8. Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\phi'(x) = 2x\ln(1+x^4)$. Como $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$, para $|y| < 1$ (justifique), temos

$$\phi'(x) = 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} x^{4n+1},$$

para $|x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Logo, para $-1 < x < 1$,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n(4n+2)} x^{4n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{4n+2} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.

Como $\phi^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ e $\phi^{(6)}(0) = 6!\,\frac{1}{3} > 0$, ϕ tem um mínimo em 0.

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.