Notas das Aulas Teóricas de CDI-I

Prof. Responsável: Catarina Carvalho

LEAN, LEMat, MEQ, 1º Semestre de 2015/2016

Aula 1 – 15/9/2015

Informações sobre a cadeira: página Fénix.

1 Números Reais e Sucessões

Nestas primeiras aulas vamos ver como se pode *definir* os números reais a partir de algumas regras básicas dadas como verdadeiras - os chamados *Axiomas*, das quais tudo o resto se deduz.

Aproveitamos para rever/introduzir alguns conceitos que serão muito úteis (e utilizados) na cadeira: resolução de inequações, módulos e distâncias, números naturais e recorrência, método de indução matemática, supremos e infimos.

Há 3 tipos de axiomas ('regras básicas') que definem os números reais:

I. Algébricos: propriedades da soma e multiplicação;

II. Ordem: comparação, medida;

III. Completude (do supremo): existência de limites.

Começamos por tomar, como *termo primitivo*, um conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos se designam por *números reais*, onde estão definidas duas operações: soma e multiplicação.

I. **Axiomas de Corpo Algébrico**: $a, b, c \in \mathbb{R}$

(1) Comutatividade: $a + b = b + a$, $ab = ba$.

(2) Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$.

(3) Distributividade: $a(b + c) = ab + ac$.

(4) Elemento neutro: Existem elementos *diferentes* 0 e 1 tais que $a + 0 = a \cdot 1 = a$.

(5) Simétrico: A equação $a + x = 0$ tem solução em $\mathbb{R}$.

(6) Inverso: Se $a \neq 0$, a equação $a \cdot y = 1$ tem solução em $\mathbb{R}$.

(Todas) as propriedades algébricas vossas conhecidas seguem destas, e chamam-se Teoremas ou Proposições. Por exemplo,

Teorema 1.1. *Leis do Corte: Para $u, v, a \in \mathbb{R}$,*

(i) $u + a = v + a \Rightarrow u = v$,

(ii) Se $a \neq 0$: $u\,a = v\,a \Rightarrow u = v$.

A título de exemplo, vejamos como se provaria (i) das propriedades (I.1) - (I.6): toma-se x tal que $a + x = 0$, de (I.5) e, usando (I.2) e (I.4),

$$\begin{aligned} u + a = v + a \quad &\Rightarrow \quad (u + a) + x = (v + a) + x \\ u + (a + x) = v + (a + x) \quad &\Rightarrow \quad u + 0 = v + 0 \\ u = v. & \end{aligned}$$

Propriedades:

1. Unicidade dos elementos neutros: se $a + x = a = a + 0$ então da Lei do Corte, $x = 0$, e se $a\,y = a = a \cdot 1$, então $a = 1$.

2. Unicidade de soluções de $a + x = 0$ e $ax = 1$: vê-se da mesma forma, definimos o *simétrico* $-a$ e o *inverso* a^{-1}, respectivamente como sendo essas soluções:

$$a + x = 0 \Leftrightarrow x = -a, \qquad a\,x = 1 \Leftrightarrow x = a^{-1},\ a \neq 0.$$

Podem então *definir-se* duas 'novas' operações:

- *Subtração*: $b - a = b + (-a)$,
- *Divisão*: $\frac{a}{b} = a\,b^{-1}$.

(que não são associativas nem comutativas - ver propriedades seguintes). É claro que $b^{-1} = \frac{1}{b}$.

Outras propriedades (Exercício: provar usando apenas propriedades acima): para $a, b \in \mathbb{R}$, temos

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

2) $a\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$;

3) $-(-a) = a$, $-(a + b) = -a - b$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$;

4) $-(a\,b) = (-a)b = a(-b)$, $(-a)(-b) = a\,b$; $(-b)^{-1} = -b^{-1}$;

5) Casos notáveis: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a\,b + b^2$
(em que $a^2 = a\,a$, $2a = a + a$...)

6) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm cb}{bd}$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a\,d}{b\,c}$.

Reparem que estas propriedades não são exclusivas de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ verificam, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não verificam. Talvez mais surpreendente é o próximo exemplo, que mostra que as propriedades algébricas por si só não dão a estrutura esperada ao nosso conjunto $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Considere $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ com as operações $+, \cdot$ definidas pelas tabelas seguintes:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

É fácil ver que $\mathbb{Z}_2$ verifica (I.1) – (I.6). Por outro lado, verifique que $-1 = 1$ (ou seja, que o simétrico de 1 é 1).

Aula 2 – 17/9/2015

Vimos as propriedades algébricas básicas de $\mathbb{R}$. Veremos agora os axiomas de ordem, que darão a estrutura geométrica que temos como intuitiva da *recta real*.

Notem que também temos como assumido da estrutura intuitiva de recta que ao posicionarmos o número 0 dividimos os reais em duas partes, disjuntas. É isso que os proximos axiomas garantem.

II. **Axiomas de Ordem**: Existe um subconjunto designado por $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, dito dos reais positivos, tal que

(1) Fecho em relação a + e ·: se $a, b \in \mathbb{R}^+$ então $a + b \in \mathbb{R}^+$, $a\, b \in \mathbb{R}^+$

(2) Tricotomia: qualquer $a \in \mathbb{R}$ verifica uma, e uma só, das condições seguintes:

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad \text{ou} \quad a = 0, \quad \text{ou} \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

É claro que o corpo algébrico $\mathbb{Z}_2$ não verifica (II.2), já que ter-se-ia simultaneamente $1 \in \mathbb{R}^+$ e $-1 \in \mathbb{R}^+$. Podemos definir os reais negativos como

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Neste caso, (II.2) poderia escrever-se

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-, \quad \text{em que } \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset,\ 0 \notin \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$$

Daqui aparece a noção de *ordem* (o que é 'maior'). Definimos, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ se $a \in \mathbb{R}^+$ e

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+.$$

Escreve-se $b < a \Leftrightarrow a > b$, e (II.2) é equivalente a dizer que para $a, b \in \mathbb{R}$ verifica-se um, e um só, de três casos possíveis:

$$a > b \ \vee \ a = b \ \vee \ a < b.$$

Em particular todos os elementos são comparáveis, relação de ordem total (estrutura de recta com sentido crescente).

Temos $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < 0\}$ e definem-se como é usual intervalos em $\mathbb{R}$ da forma seguinte

$$]\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\}, \quad]\,a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x\}, \quad]-\infty, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < b\}.$$

(da mesma forma $]\,a, b]$, etc.)

Teorema 1.3 (Transitividade). *Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.*

Porque: se $b - a \in \mathbb{R}^+$ e $c - b \in \mathbb{R}^+$ então

$$(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow c - a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a < c.$$

Algumas propriedades muito úteis na resolução de inequações (e que se assumem sabidas):

1. $a > b \Leftrightarrow -a < -b$
   (já que $a - b \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow -b - (-a) \in \mathbb{R}^+$.)
2. Regras de sinais:
   i) $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
   ii) $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$.
3. Leis do Corte:
   i) $a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$.
   ii) $ac > bc \Leftrightarrow (a > b \wedge c > 0) \vee (a < b \wedge c < 0)$.

Sai de 2.i) com $b = a \neq 0$, que para qualquer $a \neq 0$, $a^2 > 0$. Esta observação simples tem várias consequências imediatas:

- $\mathbb{C}$ não verifica os Axiomas de ordem, já que $i^2 = -1 < 0$.
- $1 = 1^2 > 0$, e $2 = 1 + 1 > 1 > 0$, $3 = 2 + 1 > 0$, etc.

Por outro lado, a e a^{-1} têm sempre o mesmo sinal, já que $a\,a^{-1} = 1 > 0$, e portanto as propriedades anteriores também são válidas para quocientes, por exemplo

$$\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$$

Exercício: Prove também que

$$(a > b > 0 \;\vee\; 0 > a > b) \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \quad a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

Exemplos:

1. $x^2(1-x) \leq 0$

2. $\dfrac{x^2}{1-x} \leq 0$

3. $\dfrac{x^2}{x-2} < x.$

4. Resolver, em $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x} < 1$. Qual o *erro* na 'resolução' seguinte:

$$\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 < x \Leftrightarrow x > 1?$$

   (O conjunto solução é $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.)

<u>Módulo ou valor absoluto</u>:

Define-se, para $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Geometricamente, $|x|$ representa a distância de x a 0.

Algumas propriedades (Exercício: provar)

1. $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $|-x| = |x|$.

3. $|xy| = |x||y|$ e $|x|^2 = |x^2| = x^2$.

4. <u>Desigualdade triangular</u>: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

5. Se $R > 0$,

   $|x| < R \Leftrightarrow x > -R \wedge x < R \Leftrightarrow -R < x < R$.

   $|x| > R \Leftrightarrow x < -R \vee x > R$.

6. $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|$.

Para $a \in \mathbb{R}$ fixo, é fácil ver que $|x-a|$ representa a distância de x ao ponto a.

Definição 1.4. Define-se *vizinhança de centro a e raio* $\epsilon > 0$,

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-a| < \epsilon\} \ = \,]\,a-\epsilon, a+\epsilon\,[$$

como os conjunto dos pontos cuja distância a a é inferior a ϵ.

Por exemplo, $V_1(0) =]-1,1[$, $V_{0.1}(-1) =]-0.9, 1.1[$, $V_{\frac{1}{2}}(1) =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

Se estivermos a aproximar a por x então $|x-a|$ representa o *erro* cometido na aproximação e ao fazermos $|x-a| < \epsilon$, estamos a admitir uma margem de erro de, no máximo, ϵ. Por exemplo, para aproximarmos π com erro no máximo de 10^{-2} queremos x tal que $|x-\pi| < 10^{-2}$, podemos fazer $x = 3,14$ (por defeito) ou $x = 3,15$ (por excesso) ou $x = 3,1425$ (ou...)

Exemplos: resolver em $\mathbb{R}$

1. $|x-1| < \frac{1}{2}$.
2. $|2x+4| > 1$.
3. $|x-2| < |x+1|$.
4. $\dfrac{x^2-9}{|x+1|} \leq 0$.
5. $\dfrac{|x-1|-1}{|x|-1} \geq 0$.

Aula 3 – 18/9/2015

Vamos ver em mais detalhe agora alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$. Começamos pelos chamados *números naturais*. Intuitivamente,

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1 = 2, 1+1+1 = 3, \ldots\}$$

(e até sabemos que $1 > 0$, $1+1 = 2 > 1$, etc.)

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se *indutivo* se

- $1 \in A$,
- $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$.

É claro que $\mathbb{R}$ é indutivo, assim como $\mathbb{R}^+$, $[1, +\infty[$, $]-2, +\infty[$, e por ex. $\mathbb{R}^-$, $[1, 10000]$ não são indutivos. Queremos definir $\mathbb{N}$ consistindo 'precisamente' dos sucessores de 1 (e neste caso, todos os outros conjuntos indutivos o contêm), ou seja, $\mathbb{N}$ é 'menor' conjunto indutivo:

Definição 1.5. Define-se o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais como

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \{n \in \mathbb{R} \;:\; n \in \text{a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\} \\ &= \text{intersecção de todos os conjuntos indutivos.}\end{aligned}$$

Em particular, se $A \subset \mathbb{N}$ e é indutivo, então $A = \mathbb{N}$. Seja $A \subset \mathbb{N}$ o conjunto dado por

$$A = \{n \in \mathbb{N} \;:\; P(n) \text{ é verdadeira}\},$$

para uma dada proposição ('afirmação') $P(n)$, dependente de $n \in \mathbb{N}$. Este conjunto é indutivo se $P(1)$ é verdadeira e se $P(n)$ verdadeira $\Rightarrow P(n+1)$ verdadeira . [1] Neste caso, concluímos que $A = \mathbb{N}$ ou seja que $P(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Acabámos de ver um método muito útil para provar afirmações dependentes de um parâmetro (variável) natural:

[1] Esta afirmação é equivalente a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, já que se $P(n)$ for falsa, a implicação é sempre verdadeira.

Teorema 1.6 (Método de Indução Matemática)**.** *Seja $P(n)$ uma proposição, $n \in \mathbb{N}$. Se*

- *$P(1)$ é verdadeira*
- *$P(n) \Rightarrow P(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,*

então $P(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1. Provar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$: queremos ver que $n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Com $P(n)$ a afirmação '$n > 0$':
   - $P(1)$ é verdadeira, já que $1 > 0$.
   - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: se $n > 0$ então $n+1 > 1 > 0$, logo $n+1 > 0$ (por transitividade).

   (Da mesma forma: $n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.)

2. Provar que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   - $P(1)$ é verdadeira, já que $4^1 - 1 = 3$ é múltiplo de 3.
   - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, para dado n (fixo, mas arbitrário) que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, temos
   $$4^{n+1} - 1 = (1+3)4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + (4^n - 1)$$
   é múltiplo de 3.

3. $2^{n-1} \geq n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   - $P(1)$ é verdadeira, já que $2^0 \geq 1$.
   - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução, que para dado n (fixo) se tem $2^{n-1} \geq n$ queremos provar que $2^n \geq n+1$. Então:
   $$2^{n-1} \geq n \Rightarrow 2^n \geq 2n \geq n+1$$
   já que $n \geq 1$ (logo $n + n \geq n + 1$). Por transitividade, $2^n \geq n+1$, como queríamos mostrar.

4. Em geral: para $a > 0$ fixo, temos a *desigualdade de Bernouilli:*
   $$(1+a)^n \geq 1 + na$$
   , para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Exercício: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$

NOTAS:

1. Provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ não é suficiente! Por exemplo, seja $P(n)$ a afirmação '$\operatorname{sen}(2n\pi) = 2$, $n \in \mathbb{N}$', que é obviamente falsa, para qualquer n. Mas é fácil ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,
   $$\operatorname{sen}(2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}(n\pi).$$

2. É claro que se quisermos provar uma determinada proposição apenas para $n \geq n_0$, começamos por verificar $P(n_0)$ e provamos $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ como antes (é suficiente ver para $n \geq n_0$).

Exemplo: Mostrar que $n! \geq 2^n$, para $n \geq 4$ – Exercício.

Reaprem que o método de indução é particularmente útil quando os termos envolvidos estão *definidos por recorrência*: por ex. r^n, $n!$:

$$\begin{cases} 1! = 1, \\ (n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \begin{cases} r^1 = r, \\ r^{n+1} = r \cdot r^n \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Um outro exemplo é dado por somas com número de parcelas dependente de n:

Exemplo: Mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Se $P(n)$ representa a igualdade acima temos:

- $P(1)$ é verdadeira: $1 = 1^2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução, que para dado n (fixo) se tem

  $$1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$$

  queremos provar que

  $$1 + 3 + ... + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2.$$

  Mas por HI, temos

  $$1 + 3 + ... + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

  como queríamos mostrar.

Aula 4 – 22/9/2015

Vimos o conjunto $\mathbb{N}$, método de Indução Matemática. Somatórios.

<u>Somatórios:</u> Dada uma sucessão de números reais $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Propriedades:

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

2. $\sum_{k=1}^{n}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);
3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ (propriedade telescópica).
4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

Para mostrar por exemplo a propriedade telescópica: por indução

- $n = 1$: temos $\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+2}.$$

Exemplos:

1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.
   (Em particular, qualquer número natural é sucessor de 1.)
2. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
   $$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
   - $n = 1$: temos $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.
   - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$
3. Para qualquer $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$:
   $$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$
   - $n = 0$: temos $1 = \dfrac{1-r}{1-r}$.
   - $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:
   $$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1-r)}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}.$$

   (Também se vê facilmente sem usar indução: exercício.)

   NOTA: também temos
   $$\sum_{k=p}^{n} r^k = r^p(1 + \ldots + r^{n-p}) = r^p\,\frac{1 - r^{n-p+1}}{1 - r}.$$

Propriedades de $\mathbb{N}$ (podem provar-se por indução): para $n, m \in \mathbb{N}$

1. $n + m,\ nm \in \mathbb{N}$
2. $n > 1 \Rightarrow n = k + 1, k \in \mathbb{N}$
3. $n > m \Rightarrow n - m \in \mathbb{N} \ \Rightarrow n \geq m + 1$
4. $n \neq m \Rightarrow |n - m| \geq 1$.

Podemos agora definir

Definição 1.7. O *conjunto dos números inteiros* $\mathbb{Z}$ e o *conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

(onde $\{-\mathbb{N}\} = \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$).

É claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Voltando aos Axiomas / propriedades que caracterizam $\mathbb{R}$, vemos que

- $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}_2$ satisfazem axiomas de corpo, mas não de ordem,
- $\mathbb{Z}$ satisfaz axiomas de ordem, mas não tem inversos,
- $\mathbb{Q}$ satisfaz axiomas de ordem e de corpo.

Portanto os elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ terão que ser definidos a partir de outras propriedades.

Proposição 1.8. *Se* $x^2 = 2$ *então* $x \notin \mathbb{Q}$.

Vamos mostrar por 'redução ao absurdo' ou seja, supomos que não é verdade e chegamos a uma contradição (impossibilidade). Logo, a afirmação será verdadeira. Suponhamos então que $x^2 = 2$ e $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e que $\frac{p}{q}$ é fração irredutível (p e q não têm divisores comuns). Então:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2,$$

ou seja p^2 será par. Tem-se que neste caso p também será par. Escrevendo $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, temos agora

$$4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2.$$

Usando o mesmo raciocínio, concluímos que q é também par, o que contraria o facto de $\frac{p}{q}$ ser irredutível. Conclui-se que a equação $x^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

Exercício 1.9. 1) Mostrar que se p^2 é par então p é par (Sug.: comece por mostrar que se p é impar, p^2 é impar).

2) Mostre que para $m \in \mathbb{N}$ primo, a equação $x^2 = m$ não tem solução em $\mathbb{Q}$. (Pode assumir que se p^2 é multiplo de m então p é multiplo de m.)

3) A equação $2^x = 3$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

O próximo Axioma / propriedade de $\mathbb{R}$ garante, em particular, que a equação $x^2 = 2$ tem de facto solução em $\mathbb{R}$ - portanto distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ e dá-nos uma forma de 'definir' números irracionais.

Supremo e ínfimo de um conjunto

Definição 1.10. Seja $A \subset \mathbb{R}$.

i) A diz-se *majorado* se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para qualquer $x \in A$. Neste caso, b diz-se um *majorante* e $A \subset]-\infty, b]$.

ii) A diz-se *minorado* se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, para qualquer $x \in A$. Neste caso, b diz-se um *majorante* e $A \subset [a, +-\infty[$.

iii) A diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$, para qualquer $x \in A$ e $A \subset [a, b]$.

Exemplo: $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$ são conjuntos limitados, e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Majorantes } = [3, +\infty[, \quad \text{Minorantes } =]-\infty, 1].$$

$\mathbb{R}$ não majorado nem minorado, $\mathbb{R}^+$ minorado, não majorado

Definimos *máximo* e *mínimo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (se existirem), ou seja:

- $\max A = M$ se M é majorante e $M \in A$ e
- $\min A = m$ se m é minorante e $m \in A$.

Temos $\max[1,3] = 3$, $\min[1,3] = 1$ e que max e min de $]1,3[$ não existem.

Definição 1.11. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Define-se o *supremo* e o *ínfimo* de A como:

- $\sup A$ é o menor dos majorantes de A, se existir.
- $\inf A$ é o maior dos minorantes de A, se exitir.

É claro que $\sup A$ pode ou não pertencer a A. Aliás, A tem máximo se, e só se, $\sup A \in A$ e neste caso $\max A = \sup A$.

Exemplos: $\sup]1,3[= 3$, $\inf]1,3[= 1$, $\sup\{1,2,3\} = 3 = \max\{1,2,3\}$, $\inf\{1,2,3\} = 1 = \min\{1,2,3\}$.

É fácil ver que existem conjuntos majorados sem máximo. Será que existem conjuntos majorados sem supremo? Esta é a última propriedade que precisamos para caracterizar $\mathbb{R}$, e que *não* é verificada por $\mathbb{Q}$.

III. Axioma do Supremo (ou da Completude) Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo em $\mathbb{R}$.

Segue que também qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo (por ex., notando que $\inf A = -\sup(-A)$).

Aula 5 – 24/9/2015

Exemplos:

1. $A = \{-100\} \cup [0, 100[$: $\sup A = 100 \notin A$ logo A não tem máximo, $\inf A = -100 \in A$ logo $\min A = -100$.
2. $A = \{-100, 0, 100\}$: $\sup A = \max A = 100$, $\inf A = \min A = -100$.
3. Qualquer conjunto finito (i.e., com número finito de elementos) tem máximo e mínimo.

NOTA: Se $A \subset B$ então os majorantes de B são majorantes de A, logo $\sup A \leq \sup B$, já que $\sup B$ é majorante de A (e $\sup A$ é o menor majorante de A).

É útil pensar em $\sup A$ e $\inf A$ como as melhores aproximações por excesso e por defeito de A, como é expresso na seguinte definição equivalente (para o infimo é análogo):

Proposição 1.12. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então $s = \sup A$ se e só se s é majorante de A e para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstração. – Se $s = \sup A$ então s é majorante por definição logo $x \leq s$, para qualquer $x \in A$. Para ver que $V_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, ou seja, que existe $x \in A \cap]s - \epsilon, s]$, notamos que se não fosse esse o caso, teríamos $x \leq s - \epsilon$, para qualquer $x \in A$, e $s - \epsilon < s$ seria majorante, o que é impossível, dado que s é o menor dos majorantes.[2]

– Se s é majorante e para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$, vamos ver que s é o menor majorante: se $t < s$ então existe $x \in A$ tal que $t < x \leq s$ (tomando uma vizinhança de s de raio menor que a distância de t a s, ou seja $\epsilon < s - t$). Logo $t < x \in A$ e t não é majorante. □

A condição acima expressa que qualquer vizinhança de s contém elementos de A (claro que neste caso $x \in A \cap]s - \epsilon, s]$, uma vez que $x \leq s$, para $x \in A$) ou seja, existem elementos de A tão perto quanto se queira de s. Temos

$$s = \sup A \Leftrightarrow s \text{ é majorante e }]s - \epsilon, s] \cap A \neq \emptyset \text{ , para qualquer } \epsilon > 0,$$

$$a = \inf A \Leftrightarrow a \text{ é minorante e } [a, a + \epsilon[\cap A \neq \emptyset \text{ para qualquer } \epsilon > 0.$$

Exemplos:

1. $A = [0, 1] \cup \{2\}$, então $V_\epsilon(2) \cap A = \{2\}$ para $\epsilon < 1$.
2. $A =]0, 1[$, então $V_\epsilon(1) \cap A =]1 - \epsilon, 1[$, $V_\epsilon(0) \cap A =]0, \epsilon[$, $0 < \epsilon < 1$ (se $\epsilon > 1$, a intersecção coincide com A).
3. Qualquer conjunto $A \subset \mathbb{N}$ majorado, ie, tal que $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$ existe, tem máximo.

   Como $\alpha - 1$ não é majorante, existe $k \in A$ tal que $\alpha - 1 < k \leq \alpha < k + 1$. Como $]k, k + 1[\cap A = \emptyset$ (já que $A \subset \mathbb{N}$ e a distância entre dois naturais é pelo menos 1), temos $k = \alpha \in A$.

   (OU: neste caso A é finito.)

[2] Se A tem máximo, i.e., $s \in A$, então é evidente que $s \in V_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$.

Aplicações:

1. A equação $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{R}$: consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}.$$

Este conjunto é não vazio, por exemplo $1 \in A$, e majorado, por exemplo por 2 (se $x > 2$ então $x^2 > 4$ e $x \notin A$, ou seja, qualquer $x \in A \Rightarrow x \leq 2$). Conclui-se que tem supremo $\alpha \in \mathbb{R}$, e é claro que $1 \leq \alpha \leq 2$.

Pode ver-se que neste caso $\alpha^2 = 2$: temos $\alpha^2 < 2 \vee \alpha^2 = 2 \vee \alpha^2 > 2$, procede-se por eliminação.

Note-se primeiro que se $x \in V_\delta(\alpha)$ com $0 < \delta < 1$, tem-se $0 < x < 3$ e

$$|x^2 - \alpha^2| = |x - \alpha||x + \alpha| < 5\delta \Leftrightarrow -5\delta + \alpha^2 < x^2 < \alpha^2 + 5\delta.$$

Se fosse $\alpha^2 \neq 2$, poderíamos tomar $0 < \delta < \frac{|\alpha^2 - 2|}{5}$, e neste caso:

- se $\alpha^2 < 2$, então $5\delta < 2 - \alpha^2$ e vem que $x^2 < 2$, ou seja $x \in A$, para qualquer $x \in V_\delta(\alpha)$, o que é impossível dado que $\alpha = \sup A$ (não seria majorante).
- se $\alpha^2 > 2$, então $5\delta < \alpha^2 - 2$ e vem que $x^2 > 2$, para qualquer $x \in V_\delta(\alpha)$, em particular $V_\delta(\alpha) \cap A = \emptyset$, o que é de novo impossível por ser $\alpha = \sup A$.

Logo $\alpha^2 = 2$.

Em particular, vemos que A não tem supremo em $\mathbb{Q}$, ou seja $\mathbb{Q}$ não verifica o Axioma do Supremo.

2. $\pi = \sup\{$áreas de polígonos inscritos circuferência raio 1$\}$

(e também $e = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ : n \in \mathbb{N}\right\}$ - veremos mais tarde).

3. Dizimas periódicas: por exemplo

$$0,3(3) = \sup\{0,3\,,\,0,33\,,\,0,333\,,...\} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exercício: Definindo $0,9(9)$ como acima, mostre que $0,9(9) = 1$. (Sugestão: veja primeiro que $1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 10^{-n}$ - use exemplo 3. do fim da aula 3.)

Mais exemplos:

1. $\mathbb{N}$ não é majorado, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ não são majorados nem minorados.

Se $\mathbb{N}$ fosse majorado teria máximo $\alpha \in \mathbb{N}$, o que é absurdo já que $\alpha < \alpha + 1 \in \mathbb{N}$.

2. Propriedade Arquimediana: dados $\epsilon > 0$ e $R > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n\epsilon > R$. [3]

Como $\mathbb{N}$ não é majorado, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > \frac{R}{\epsilon}$.

[3] Ou seja: dada uma unidade de medida ϵ - 'pequena' - podemos cobrir distância R - 'grande', repetindo-a um numero n - suficentemente grande - de vezes.

3. $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$: é limitado, $\sup A = \max A = 1$. Vemos que $\inf A = 0$: é claro que 0 é minorante (e $\notin A$). Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ temos $V_\epsilon(0) \cap A \neq \emptyset$ já que para $n > \frac{1}{\epsilon}$, temos $\frac{1}{n} < \epsilon$.

4. $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$: $\inf A = \min A = 2$, não é majorado, já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n + 1$.

   (Em geral: se $r > 0$, então $r^n \geq 1 + n(r-1)$ - desigualdade de Bernoulli, logo se $r > 1$, $\{r^n : n \in \mathbb{N}\}$ não é majorado.)

5. $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ não é majorado, tem $\inf = 0$, não tem mínimo.

Reparem que segue do Exemplo 3 acima que $V_\epsilon(0) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, para todo o $\epsilon > 0$, logo qualquer vizinhança de zero tem infinitos racionais (já que $\mathbb{N}$ é infinito).

Por outro lado também $V_\epsilon(0) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, para todo o $\epsilon > 0$ (toma-se por ex. $\frac{\sqrt{2}}{m}$), logo qualquer vizinhança de zero tem infinitos irracionais.

Mais geralmente:

Proposição 1.13. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$:*

i) existem $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $a < \dfrac{p}{q} < b$ ou seja, $\dfrac{p}{q} \in]a, b[$,

ii) existe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < t < b$ ou seja, $t \in]a, b[$.

Demonstração. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $\dfrac{1}{n} < b - a$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{m} < b - a$. Da propriedade Arquimediana, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k\,\frac{1}{n} > a > (k-1)\,\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; a < \frac{k}{n} < a + \frac{1}{n} < b$$

(já que $\frac{1}{n} < b - a$) e $\dfrac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Da mesma forma, pode tomar-se $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$j\,\frac{\sqrt{2}}{m} > a > (j-1)\,\frac{\sqrt{2}}{m} \;\Rightarrow\; a < \frac{j\sqrt{2}}{m} < a + \frac{\sqrt{2}}{m} < b$$

e $\dfrac{j\sqrt{2}}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Variando o intervalo, pode concluir-se que:

Qualquer intervalo em $\mathbb{R}$ contem infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Em particular, qualquer número real pode ser aproximado com erro arbitrariamente pequeno por racionais (e por irracionais também...)

Aula 6 – 25/9/2015

Sucessões

Como sabem, uma *sucessão* é uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que veremos como uma sequência de números reais

$$u_1, u_2, ..., u_n, ..., \quad n \in \mathbb{N}.$$

Escreve-se habitualmente $u_n = u(n)$, o chamado *termo geral* da sucessão. Ao conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ chama-se o *conjunto dos termos* da sucessão (ou seja, ao contradomínio de u).

Recorde-se que:

– u_n é *monótona crescente* se $u_{n+1} \geq u_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (estritamente se $u_{n+1} > u_n$),

– u_n é *monótona decrescente* se $u_{n+1} \leq u_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (estritamente se $u_{n+1} < u_n$).

A sucessão u_n diz-se *limitada* se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado, i.e., majorado e minorado. Neste caso, existem $s = \sup u_n$ e $r = \inf u_n$ e temos

$$r \leq u_n \leq s, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Claro que uma sucessão decrescente é sempre majorada (por u_1) e uma sucessão crescente é sempre minorada.

Exemplos

1. $u_n = \dfrac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{N}$: decrescente, limitada, $\max u_n = 1$, $\inf u_n = 0$.

2. $u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

   É não monótona, limitada, $\max u_n = 1$, $\min u_n = -1$.

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

   É não monótona, limitada, $\min u_n = -1$, $\max u_n = \frac{1}{2}$.

4. *Progressão aritmética*: por recorrência, em $\mathbb{N}_0$,

   $$u_0 = a, \qquad u_{n+1} = 2 + u_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

   Por indução vê-se que

   $$u_n = a + 2n, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

   é crescente, não majorada, $\min u_n = 3$.

   u_n verifica $u_{n+1} - u_n = 2$ é constante. A sucessões com esta propriedade chamamos *progressões aritméticas*, de *razão* 2 neste caso.

   O termo geral de uma progressão aritmética de razão r é $u_n = a + rn$.

5. *Progressões geométricas*: por recorrência, em $\mathbb{N}_0$,

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = 2u_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por indução vê-se que

$$u_n = 3 \cdot 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

é crescente, não majorada, $\min u_n = 3$.

u_n verifica $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$, é constante. A sucessões com esta propriedade chamamos *progressões geométricas*, de razão 2 neste caso. O termo geral de uma progressão geométrica, de razão r e $u_0 = a$, é $u_n = ar^n$.

(Ver Fichas para mais propriedades das progressões geométricas e aritméticas.)

Notem que $(-1)^n$ também é progressão geométrica, de razão -1.

6. $u_n = (-2)^n = (-1)^n 2^n$: não monótona, não majorada, não minorada.

(É uma progressão geométrica de razão -2.)

Limite de sucessões

Temos uma noção intuitiva do que é uma sucessão convergir para um dado número, ou 'aproximar-se arbitrariamente' de um dado número, quando $n \to \infty$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \to 0,$$

$$0, 0.3, 0.33, 0.333, \cdots \to \frac{1}{3},$$

Mas se vos for dada uma sucessão definida por recorrência, por exemplo da forma

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, \end{cases}$$

não é de todo imediato qual será o seu limite, ou sequer se esta sucessão aproxima algum valor. Por esta e outras razões precisamos de uma definição rigorosa de limite, que nos permita estabelecer de forma inequivoca se uma sucessão converge para um dado número, e também para construir uma teoria que leve ao cálculo simples de limites.

Como formalizar:

u_n aproxima-se arbitrariamente de a quando $n \to \infty$?

O erro dessa aproximação é dado por $|u_n - a|$. Por exemplo, para $u_n = \frac{1}{n}$: já vimos que $0 = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e que daí vem que qualquer vizinhança $V_\varepsilon(0)$ tem termos u_n, ou seja tais que $|u_n - 0| < \varepsilon$. Esta condição por si só não chega,[4] mas vemos que mais do que isso é verdade: se $1/N \in V_\varepsilon(0)$ também teremos $1/n \in V_\varepsilon(0)$, para $n \geq N$.

[4]Por ex. $u_n = 1/n$ para n par, e $u_n = 2 - 1/n$ para n ímpar também verifica e neste caso u_n não converge para 0...

Exemplo: $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

É 'intuitivo' que u_n se aproxima de 1 para n 'grande'. Vamos calcular o erro cometido ao aproximar 1 por u_n ou seja, a distância entre 1 e u_n:

$$|u_n - 1| = \frac{1}{n}.$$

Se quisermos garantir uma margem de erro de $\varepsilon > 0$ então resolvemos $|u_n - 1| < \varepsilon$, por ex.

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 0,1: &\quad |u_n - 1| < 0.1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0.1 \Leftrightarrow n > 10\\
\varepsilon = 0,001: &\quad |u_n - 1| < 0.001 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0.001 \Leftrightarrow n > 1000\\
\varepsilon = 10^{-100}: &\quad |u_n - 1| < 10^{-100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 10^{-100} \Leftrightarrow n > 10^{100}.
\end{aligned}$$

Diz-se que $u_n \to a$, u_n converge para a, ou aproxima a, se o erro $|u_n - a|$ puder ser feito tão pequeno quanto se queira (i.e., $< \varepsilon$), desde que se tome n suficientemente grande, $n > N$, para algum $N \in \mathbb{N}$ (dependente de ε).

Definição 1.14. Seja u_n uma sucessão real e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que u_n *converge para a*, $\lim u_n = a$ (ou $u_n \to a$) se dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

O valor $\varepsilon > 0$ é visto como a margem de erro 'permitida' na aproximação de a por u_n.

No exemplo acima, tinhamos $\varepsilon = 0,1 \Rightarrow N = 10$, $\varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow N = 1000$, e para cada valor de ε dado conseguimos replicar com um N: basta tomar $N \geq 1/\varepsilon$. (A ordem N que garante erro $< \varepsilon$ em geral depende de ε e tipicamente aumenta quando ε diminui - maior exigência.[5])

Exemplos:

1. $u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

   Para ver que de facto $\lim \dfrac{1}{n} = 0$:

   $$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

   Logo, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ com $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$

   Temos

   $$|u_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

   e procedemos como acima.

[5]Claro que por ex. se $u_n = c$ for constante, podemos tomar sempre $N = 1$ independentemente de ε.

NOTA: Uma sucessão converge para a sse o *erro na aproximação convergir para* 0, ou seja

$$u_n \to a \Leftrightarrow |u_n - a| \to 0.$$

Aula 7 – 29/9/2015

Vimos noção de limite e de sucessão convergente:

$$u_n \to a \Leftrightarrow |u_n - a| \to 0$$

se *erro na aproximação convergir para* 0, ou seja, se dado $\epsilon > 0$, temos erro $= |u_n - a| < \epsilon$, desde que $n > N$, para algum $N \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1. $u_n = \dfrac{1}{n^p} \to 0$, $p \in \mathbb{N}$, já que

$$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt[p]{\varepsilon}$$

   e para dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $N \geq \sqrt[p]{\varepsilon}$.

2. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0.$

3. $u_n = 2 - \dfrac{1}{n!} \to 2.$

Notem que estes exemplos são de *sucessões monótonas e limitadas*. Neste caso temos sempre:

Teorema 1.15. *Qualquer sucessão monótona e limitada é convergente:*

1. u_n *crescente e majorada* $\Rightarrow$ u_n *convergente e* $\lim u_n = \sup u_n$*,*

2. u_n *decrescente e minorada* $\Rightarrow$ u_n *convergente e* $\lim u_n = \inf u_n$*.*

Demonstração. : Seja u_n uma sucessão monótona e limitada, com $s = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $r = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (que existem, pelo Axioma do Supremo). Vemos que se u_n é crescente, então $u_n \to s$ (neste caso, é sempre minorada e $r = \min u_n = u_1$). A demostração para decrescente é completamente análoga.

Dada uma vizinhança $V_\varepsilon(s)$ qualquer, sabemos que, por s ser supremo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $u_N \in V_\varepsilon(s)$ ou seja, $|u_N - s| < \varepsilon$. Como u_n é crescente, para $n > N$ tem-se $s \geq u_n \geq u_N$. Logo, para $n > N$, $|u_n - s| < \varepsilon$ e portanto, da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, $u_n \to s$. □

Vimos então um primeiro exemplo de uma (sub)classe de sucessões convergentes: monótonas e limitadas (com sup se forem crescentes, com inf se forem decrescentes). Se uma sucessão não for monótona pode ou não ser convergente:

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^p} \to 0$, $p \in \mathbb{N}$, já que

$$|u_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} \to 0.$$

2. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n} \to 0.$

3. $u_n = (-1)^n$ é divergente: vamos ver que $u_n \not\to 1$ (de forma análoga se pode ver que $u_n \not\to a$, $\forall a \in \mathbb{R}$). Calculando
$$|u_n - 1| = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$
Se $\varepsilon < 2$, a condição $|u_n - 1| < \varepsilon$ é verificada apenas, e por todos, os naturais pares. Para qualquer n ímpar o erro é sempre 2. Como o conjunto dos números impares é não majorado, não podemos garantir que o erro é < 2 tomando $n > N$. (Notem que temos
$$(n > N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad (n > N \Rightarrow n \text{ é par})$$
que é sempre falsa, $\forall N$.) Veremos a divergência desta sucessão de forma mais simples usando subsucessões.

4. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ é divergente.

É importante distinguir entre sucessão *limitada* (ie majorada e minorada) e sucessão *convergente* (aproxima-se de um valor). O exemplo $u_n = (-1)^n$ mostra que podemos ter sucessões limitadas que não são convergentes. Temos no entanto sempre que:

Teorema 1.16. *Qualquer sucessão convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $u_n \to a \in \mathbb{R}$. Então, da definição de limite (com $\varepsilon = 1$, por ex.), temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > N \Rightarrow a - 1 < u_n < a + 1.$$
Podemos escrever
$$\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, \cdots, u_N\} \cup \{u_n \ : \ n > N\}.$$
Como $\{u_1, \cdots, u_N\}$ é um conjunto finito, logo limitado,[6] e $\{u_n : n > N\} \subset]a-1, a+1[$ é também limitado, conclui-se que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, ou seja, u_n é sucessão limitada. □

Exemplo: As sucessões
$$n^p, p \in \mathbb{N}, \ a^n, |a| > 1, \ n!, \ (-n)^n$$
são divergentes, porque não são limitadas.

IMPORTANTE: O recíproco do Teorema anterior não é verdade: há (muitas...) sucessões limitadas que não são convergentes, por ex.:
$$(-1)^n, \ 1 + \cos(n\pi), \ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \ \frac{(2 + (-1)^n)n + 1}{n}, \text{ etc.}$$
Estas sucessões (necessariamente) não são monótonas.

<u>Limite e operações algébricas:</u>

Veremos agora alguns resultados que são úteis no cálculo de limites. (Voltaremos a todos eles no caso mais geral das funções em $\mathbb{R}$.)

[6] tem até máximo e mínimo

Proposição 1.17. *Se u_n e v_n são convergentes, $u_n \to a$ e $v_n \to b$, então também $u_n \pm v_n$, $u_n v_n$, $\frac{u_n}{v_n}$ (se $b \neq 0$) convergem e*

(i) $u_n \pm v_n \to a \pm b$,

(ii) $u_n v_n \to a\, b$,

(iii) $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração. Vemos (*i*) a título de exemplo: como antes, toma-se $N = \max\{N_1, N_2\}$ tal que se $n > N$ então $|u_n - a| < \varepsilon/2$ e $|v_n - a| < \varepsilon/2$. Da desigualdade triangular:

$$|(u_n \pm v_n) - (a \pm b)| = |(u_n - a) \pm (v_n - b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b| < \varepsilon.$$

Para (*ii*), escreve-se $|u_n v_n - ab| = |u_n v_n - u_n b + u_n b - ab| = |u_n(v_n - b) + (u_n - a)b|$ e procede-se como acima. Para (*iii*), basta ver que se $v_n \to b \neq 0$ então $\frac{1}{v_n} \to \frac{1}{b}$ (Exercício.) □

Exemplos:

1. $\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(\dfrac{(-1)^n}{n} + 1\right) \to 2.$

2. $\dfrac{n+3}{2n+1} = \dfrac{1 + 3/n}{2 + 1/n} \to \dfrac{1}{2}.$

3. $\dfrac{(n+1)^3 + 1}{(2n+1)^3} \to \dfrac{1}{8}.$

PROPRIEDADES:

1. *O limite, se existir, é único*: se u_n tivesse limites a e b, então dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode ver-se que
$$|a - b| < \varepsilon, \ \text{ para qualquer } \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \ a = b.$$
(Existiriam N_1, N_2 tais que $|u_n - a| < \varepsilon/2$, se $n > N_1$ e $|u_n - b| < \varepsilon/2$, se $n > N_2$. Tomando um $n > \max\{N_1, N_2\}$, temos $|a - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.)

2. Uma sucessão converge para a sse o *erro na aproximação convergir para* 0, ou seja
$$u_n \to a \ \Leftrightarrow \ |u_n - a| \to 0.$$

3. A convergência de uma sucessão *não depende de um número finito* de valores, ou seja, só depende de 'n grande'. Por exemplo, é fácil ver que a sucessão
$$u_n = \begin{cases} n^n, & n \leq 10000 \\ 1 - \frac{1}{n}, & n > 10000 \end{cases}$$
é convergente para 1. Neste caso, a ordem N a partir da qual se garante um determinado erro pode ser diferente/maior do que no Exemplo 1. acima por ex. $|u_n - 1| < 0.1 \Leftrightarrow n > 10000$.

   A sucessão é não monótona, limitada: $\max u_n = 10000^{10000}$, $\min u_n = 1 - \frac{1}{10001}$.

4. Se $u_n \to a > 0$ então $u_n > 0$, para $n > N$ e algum $N \in \mathbb{N}$. Mais, geralmente se $r < a$ então $u_n > r$, a partir de determinada ordem N e se $r > a$ então $u_n < r$, $n > N$.

Aula 8 – 1/10/2015

Revisão aula passada:

- convergente $\Rightarrow$ limitada.

  Mas: convergente (tem *um* limite, aproxima-se de um valor) $\neq$ limitada (majorada e minorada, está entre dois valores, i.e., o seu gráfico encontra-se numa faixa horizontal do plano).

- limitada + monótona $\Rightarrow$ convergente (crescente: $\lim u_n = \sup u_n$, decrescente: $\lim u_n = \inf u_n$).

Limite de sucessões por recorrência:

Tomemos por exemplo a sucessão seguinte:

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ u_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{3}, \end{cases}$$

Como calcular o limite, ou decidir se u_n é divergente? Se assumirmos, ou se já soubermos, que u_n é convergente, com $u_n \to L \in \mathbb{R}$, então podemos determinar os 'candidatos' a limite da seguinte forma:

- $u_{n+1} \to L$, porque u_{n+1} é subsucessão de u_n,
- $2 + \dfrac{u_n}{3} \to 2 + \dfrac{L}{3}$, pelas propriedades algébricas do limite.

Tomando o limite na expressão por recorrência, temos então

$$L = 2 + \frac{L}{3} \Leftrightarrow \frac{2L}{3} = 2 \Leftrightarrow L = 3.$$

Ou seja: se u_n é convergente em $\mathbb{R}$ então $\lim u_n = 3$. Mas reparem que os cálculos acima não garantem de todo a convergência de u_n (aliás, se $u_n \to \pm\infty$ - veremos a seguir - são ainda válidos).Várias formas para mostrar que u_n tem limite em $\mathbb{R}$, quase sempre envolvendo indução matemática.

Neste caso, veremos que u_n é monótona e limitada, e portanto convergente:

(i) $2 \leq u_n < 3$: por indução

- $u_1 = 2$, logo verdadeiro para $n = 1$;
- se $2 \leq u_n < 3$ então

$$2 + \frac{2}{3} \leq 2 + \frac{u_n}{3} < 2 + \frac{3}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{8}{3} \leq u_{n+1} < 3.$$

Logo, $2 < u_{n+1} < 3$.

(ii) u_n é monótona crescente:

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{u_n}{3} - u_n = \frac{2(3 - u_n)}{3} > 0, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo: Aproximar $\sqrt{2}$

Considere-se a sucessão definida para $n \in \mathbb{N}_0$ por

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, \end{cases}$$

Procedendo como acima, vemos que se $u_n \to L \in \mathbb{R}$ então

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2}.$$

É fácil ver (por indução) que $u_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, logo, teríamos $L = \sqrt{2}$.

Para ver que é convergente, pode ver-se que

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Temos então $u_n \geq \sqrt{2}$, para $n \in \mathbb{N}$ (i.e $n \geq 1$). (Exercício: mostre que u_n é decrescente, $n \in \mathbb{N}$, e portanto tem limite em $\mathbb{R}$.) Veremos de uma forma alternativa, que nos permite ainda estimar o erro cometido na aproximação: do cálculo acima temos, porque $u_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}.$$

Exercício: mostre por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}.$$

Segue-se (da definição de limite ou do princípio das sucessões enquadradas) que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

Por outro lado, se quisermos aproximar $\sqrt{2}$ com margem de erro $\varepsilon > 0$, é suficiente achar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^N} < \varepsilon \Leftrightarrow 4^{2^N} > \frac{2}{\varepsilon}.$$

(Determine N para $\varepsilon = 10^{-4}$ - a convergência é muito rápida.) Notem que $u_n \in \mathbb{Q}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ - provar por indução.

Subsucessões

Vimos que a sucessão $u_n = (-1)^n$ não é convergente, mas fazendo $n = 2k$ e $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos duas novas sucessões, agora convergentes (constantes)

$$v_k = u_{2k} = 1, \; k \in \mathbb{N}, \quad w_k = u_{2k-1} = -1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Em geral: dizemos que $v_k = u_{n_k}$ é *subsucessão* de u_n se $n_k \in \mathbb{N}$ é uma sucessão estritamente crescente de indices.

As sucessões $v_k = u_{2k}$ e $w_k = u_{2k-1}$ são exemplos de subsucessões de u_n: dos termos de ordem par, e dos termos de ordem ímpar. Há muito mais: u_{3k}, u_{k+10}, $u_{k!}$ etc.

$$\begin{array}{rccccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & \ldots \\
u_{2k} & - & u_2 & - & u_4 & - & u_6 & \ldots \\
u_{2k-1} & u_1 & - & u_3 & - & u_5 & - & \ldots \\
u_{3k} & - & - & u_3 & - & - & u_6 & \ldots \\
u_{k+1} & - & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & \ldots
\end{array}$$

Um *sublimite* é um limite de uma subsucessão.

Exemplo:

1. $(-1)^n$ tem 2 sublimites: $-1, 1$.
2. $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ tem 3 sublimites: $-1, 0, 1$.

Pode ver-se que:

Teorema 1.18. *Se u_n é convergente, então todas as suas subsucessões também são e para o mesmo limite.*

Em particular, u_n tem um único sublimite em $\mathbb{R}$. O resultado anterior dá-nos um critério de divergência:

Se (u_n) tem (pelo menos) dois sublimites diferentes, então é divergente.

Conclui-se que as sucessões vistas acima são divergentes.

Aula 9– 2/10/2015

Informalmente, vimos que há essencialmente dois tipos de fenómenos que levam a que uma sucessão seja divergente:

(i) u_n é não majorada / minorada,

(ii) u_n 'oscila', no sentido em que há subsucessões com comportamentos diferentes a nível de convergência.

Claro que podemos ter (i) + (ii) (por ex. $u_n = n^{(-1)^n}$)

Vimos que uma se uma sucessão é convergente para $a \in \mathbb{R}$, todas as suas subsucessões também serão convergentes para $a \in \mathbb{R}$. O recíproco também é verdade, usaremos na seguinte forma:

Proposição 1.19. *Se* $\lim u_{2k} = \lim u_{2k-1} = a$ *então u_n é convergente e* $\lim u_n = a$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, sejam N_1, N_2 tais que

$$|u_{2k} - a| < \varepsilon, \quad \text{se } 2k > N_1$$

$$|u_{2k-1} - a| < \varepsilon, \quad \text{se } 2k - 1 > N_2.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos $n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$. □

Exemplos:

1. $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge para 0
2. $\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$ converge para 0
3. $1 + (-1)^n$: diverge, sublimites $0, 2$.
4. $(1 + (-1)^n)n$: diverge porque é não majorada, ou $\lim u_{2k-1} = \lim 0 = 0$ e $\lim u_{2k} = \lim 4k$ não existe em $\mathbb{R}$.

   (Reparem que só tem um sublimite 0 em $\mathbb{R}$.)

Nos dois primeiros exemplos acima podíamos ver a convergência usando um outro critério muito útil:

Teorema 1.20 (Sucessões enquadradas)**.** *Se $v_n \leq u_n \leq w_n$, para $n > N$ e $\lim v_n = \lim w_n$ então u_n é convergente e $\lim u_n = a$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$ em que

$$n > N_1 \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon, \quad n > N_1 \Rightarrow |w_n - a| < \varepsilon.$$

Para $n > N$, temos então

$$a - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < a + \varepsilon$$

logo também $u_n \in V_\varepsilon(a)$, ou seja, $|u_n - a| < \varepsilon$. □

Por ex. pode ver-se a convergência de

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ já que $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.
2. $u_n = 1 + \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n!} \to 1$ já que

$$1 - \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n!} \leq 1 + \frac{1}{n!}$$

   e $\lim 1 - \dfrac{1}{n!} = \lim 1 + \dfrac{1}{n!} = 1$.

Uma consequência muito útil na prática: se $u_n \to 0$ e b_n é uma sucessão limitada, $m \leq b_n \leq M$, então

$$mu_n \leq u_n b_n \leq Mu_n$$

e por enquadramento, $\lim u_n b_n = 0$. Ou seja:

O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.

NOTA: Em geral, se u_n e v_n são convergentes, com $u_n \to a$ e $v_n \to b$ então

1. $a < b \Rightarrow u_n < v_n$, para $n > N$.

   (Porque: tomando $\varepsilon < (b-a)/2$ temos que existe N tal que se $n > N$, então $u_n \in V_\varepsilon(a)$ e $v_n \in V_\varepsilon(b)$, em particular $u_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < v_n$.)

2. $u_n < v_n, n > N \Rightarrow a \leq b$. (Exercício.)

(Notem que no teorema anterior a convergência de u_n não era dada, foi provada a partir do enquadramento.)

Para terminar o nosso estudo de sucessões, vamos estender a nossa noção de limite a algumas sucessões não limitadas.

A *recta acabada* define-se como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ em que, por definição,

$$x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x > -\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podemos então escrever $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. É claro que qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ é majorado/minorado em $\overline{\mathbb{R}}$ (se $A \subset \mathbb{R}$ é não majorado em $\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$).

Definição 1.21 (Limites infinitos)**.** Seja u_n uma sucessão. Diz-se que

(i) $\lim u_n = +\infty$, ou $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ se dado $R > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \ \Rightarrow \ u_n > R.$$

(ii) $\lim u_n = -\infty$, ou $u_n \to -\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ se dado $R > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \ \Rightarrow \ u_n < -R.$$

(Considerando $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, é natural definir $V_R(+\infty) =]R, +\infty[$ e $V_R(-\infty) =]-\infty, -R[$ como as vizinhanças à esquerda e à direita de $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.[7] Nesse sentido, a definição de limite dada acima coincide com a dada anteriormente em $\mathbb{R}$ - usando vizinhanças.)

Exemplo:

1. $u_n = \sqrt{n} \to +\infty$: dado $R > 0$ resolvemos

$$u_n > R \Leftrightarrow \sqrt{n} > R \Leftrightarrow n > R^2.$$

   Tomando $N \geq R^2$ temos o pretendido.

<u>PROPRIEDADES</u>:

1. *Qualquer sucessão monótona tem limite em* $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Uma sucessão é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ tem um único sublimite (em $\overline{\mathbb{R}}$).

[7] Por vezes define-se $V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty[$, por forma a que $\varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow V_{\varepsilon'}(+\infty) \subset V_\varepsilon(+\infty)$.

3. Pode ver-se (exercício):

$$u_n \geq v_n \text{ e } v_n \to +\infty \;\Rightarrow\; u_n \to +\infty,$$
$$u_n \leq v_n \text{ e } v_n \to -\infty \;\Rightarrow\; u_n \to -\infty.$$

Exemplos:

1. As sucessões $n^p, p \in \mathbb{N}$, $a^n, a > 1$, $n!$, n^n são todas convergentes para $+\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ - são crescentes, não majoradas.

2. $u_n = (1 + (-1)^n)n$ é divergente em $\overline{\mathbb{R}}$

3. Progressão geométrica a^n:
   - é divergente em $\overline{\mathbb{R}}$ se $a < -1$,
   - divergente em $\mathbb{R}$ (e em $\overline{\mathbb{R}}$) se $a = -1$,
   - convergente para 0 se $|a| < 1$ e para 1 se $a = 1$,
   - convergente para $+\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ se $a > 1$.

Os resultados vistos para operações algébricas mantêm-se válidos em $\overline{\mathbb{R}}$, respeitando as seguintes convenções:

- $a + (\pm\infty) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}$;
- $a \cdot \pm\infty = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } a > 0, \\ \mp\infty, & \text{se } a < 0, \end{cases}$;
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \; (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(\pm\infty)(+\infty) = \pm\infty, \; (\pm\infty)(-\infty) = \mp\infty$,
- $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0, a \in \mathbb{R}, \; \dfrac{1}{0^+} = +\infty, \; \dfrac{1}{0^-} = -\infty.$ [8]

Exemplos:

1. $\lim \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(n^2 + 1) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty.$

2. $\lim \dfrac{2^{-n}}{n} = \dfrac{0}{+\infty} = 0.$

Aula 10 – 6/10/2015

Símbolos de indeterminação (ou indeterminações): $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ (veremos mais tarde: 0^0, ∞^0, 1^∞).

Notem que as convenções algébricas em $\overline{\mathbb{R}}$, ie envolvendo ∞, são na realidade sobre *limites*: por ex. $a \cdot (+\infty) = +\infty$ quer dizer que para quaisquer sucessões (funções) u_n com limite a e v_n com limite $+\infty$, temos $\lim u_n v_n = +\infty$. No caso das indeterminações, o limite

[8] Mas $\dfrac{1}{0}$ pode não convergir em $\overline{\mathbb{R}}$.

dependerá das sucessões consideradas: por ex., é claro que nas indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$ podemos ter

$$\lim \frac{n^{10}}{n^{1000}} = 0, \quad \lim \frac{n^{1000}}{n^{10}} = +\infty, \quad \lim \frac{Kn^{10}}{1+n^{10}} = K \in \mathbb{R}.$$

Se u_n, v_n são infinitamente grandes, ou infinitésimos, o $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ dá-nos informação sobre como comparar as ordens de crescimento, respectivamente decrescimento, de u_n e de v_n.

Notação: se $u_n, v_n > 0$, e $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$, ou $\lim u_n = \lim v_n = 0$, escreve-se

$$u_n << v_n \text{ se } \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

e lê-se u_n é *desprezável em relação a* v_n ou *'muito menor'* que v_n. Neste caso $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = +\infty$ e $v_n >> u_n$ (*'muito maior'*).

Por ex. $n^{10} << n^{1000}$ e $\frac{1}{n^{1000}} << \frac{1}{n^{10}}$.

Em geral, temos $n^p << n^q$, se $p < q$. (Mas reparem que não é verdade para $p = q$: não temos $n^2 << 2n^2$...)

Não é tão claro neste momento como comparar outros infinitamente grandes, ou seja, quais serão, por ex., os limites

$$\lim \frac{n^p}{a^n}, \quad \lim \frac{a^n}{n!}, \quad \lim \frac{n!}{n^n}.$$

Nestes casos, o seguinte critério é muito útil:

Proposição 1.22. *Seja* $a_n > 0$. *Se* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ *então*

(i) se $L > 1$ *então* $\lim a_n = +\infty$;

(ii) se $L < 1$ *então* $\lim a_n = 0$.

Note-se que se $L = 1$ nada se pode concluir: para qualquer $a_n \to a \neq 0$ temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ (porquê?)

Demonstração. Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$ então $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para n suficientemente grande, logo a_n é crescente a partir de determinada ordem $n > N$. Se a_n fosse limitada, seria convergente $a_n \to a \neq 0$ e $L = 1$ - impossível. Assim a_n é não limitada e como é crescente para $n > N$, tem-se $a_n \to +\infty$.

Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, toma-se $b_n = \frac{1}{a_n}$ e aplica-se (i). □

Escala de sucessões: se $p > 0$ e $a > 1$, então

$$n^p << a^n << n! << n^n.$$

(i) $\lim \dfrac{n^p}{a^n} = 0$ porque fazendo $a_n = \dfrac{n^p}{a^n}$, temos $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} < 1$ para $a > 1$.

(ii) $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ porque fazendo $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, temos $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$.

(iii) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$ porque fazendo $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, temos $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$.

NOTA: O primeiro limite será também consequência do levantamento de indeterminações no contexto das funções de variável real, que veremos a seguir (os outros limites não, porquê?) Também se pode ver que $\ln n << n^p$, para $p > 0$.

Devem saber esta relação de ordem e podem usá-la no cálculo de outros limites:

Exemplos:

1. $\lim \dfrac{2^{2n} + n^3}{5^n + n^2} = 0$
2. $\lim \dfrac{2^n + n^5}{n! + 1} = 0$
3. $\lim \dfrac{n^n}{n! + 100^n} = +\infty$
4. $\lim \dfrac{n^5 2^n}{n! + 1} = 0$ (Não sai da escala de sucessões directamente.)
5. $\lim \dfrac{n^n}{3^n n!} = 0$: também não sai da escala de sucessões directamente.

   Em geral: $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = 0$, se $a > e$ e $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = +\infty$, se $a < e$.

Indeterminações de tipo potência: 0^0, ∞^0, 1^∞.

Lidaremos com estas indeterminações mais geralmente no contexto das funções. Dois casos importantes:

1. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$: é indeterminação 1^∞.

   Mais geralmente, se $u_n \to +\infty$, $v_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\frac{v_n}{u_n} \to 0$, então

   $$\lim \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

   NOTA: O número e pode *definir-se* como o limite da sucessão acima: prova-se que a sucessão é crescente e que os seus termos estão em $[2, 3[$, logo será convergente, e o seu limite denomina-se por e. Também veremos que

   $$e = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

2. Raiz índice n: se $a_n \geq 0$, define-se $u_n = \sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

   - se $a_n = a \neq 0$, constante, então

   $$\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1.$$

- se $a_n \to a \neq 0$, por enquadramento,

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = a^0 = 1.$$

- se $a_n \to 0$ ou $a_n \to \infty$, temos indeterminações 0^0 ou ∞^0.
  Veremos como levantar esta forma de indeterminação em geral quando virmos funções em $\mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $\lim \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n} = e^{-1/2}$ (ind 1^∞)
2. $\lim \sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n+3}} = 2^0 = 1$. (Não é indeterminação.)
3. $\lim \sqrt[n]{3^{n+1} + n^2} = \lim 3 \sqrt[n]{3 + \frac{n^2}{3^n}} = 3$ (ind ∞^0).
4. $\lim \sqrt[n]{2^{-n} + n^{-n}} = \lim 2^{-1} \sqrt[n]{1 + \frac{2^n}{n^n}} = 1/2$ (ind 0^0).

2 Funções Reais: Limite e Continuidade

Vamos passar agora ao estudo de funções com domínio qualquer $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Começamos por rever alguns conceitos conhecidos que usaremos na cadeira.

- O conjunto D diz-se o *domínio* de f e $\mathbb{R}$ é o conjunto de chegada. O *contradomínio* ou *imagem* de f é dado por
$$CD_f = f(D) = \{f(x) : x \in D\}.$$
Por vezes escrevemos $CD_f = f(D)$. Em geral, dado um subconjunto $A \subset D$, escrevemos $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ - corresponde à imagem dos pontos de A.

- f diz-se *limitada (majorada / minorada)* se CD_f é limitado (majorado / minorado) em $\mathbb{R}$, ou seja, se existem $M, m \in \mathbb{R}$ tais que
$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para qualquer } x \in D.$$
Define-se, quando existam, $\sup f = \sup CD_f$, $\inf f = \inf CD_f$, $\max f = \max CD_f$, $\min f = \min CD_f$. [9]

- O *gráfico de* f é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\}.$$
(f é limitada $\Leftrightarrow$ o seu gráfico está entre duas rectas horizontais $y = m$ e $y = M$.)

- f diz-se *par* se $f(-x) = f(x)$, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$ (assumindo que o domínio é simétrico).

- f é *monótona crescente* (em D) se
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1), \text{ para todos } x_1, x_2 \in D$$
(*estritamente* se $f(x_2) > f(x_1)$).

  f é *monótona decrescente* se
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1), \text{ para todos } x_1, x_2 \in D$$
(*estritamente* se $f(x_2) < f(x_1)$).

  Notem que se $D = \mathbb{N}$, i.e, se f é uma sucessão, a definição acima é equivalente à que demos $f(n+1) \geq f(n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Em $\mathbb{R}$ não é verdade! Aliás, qualquer função periódica de período 1 verifica $f(x+1) \geq f(x)$ e não é monótona (a menos que seja constante).

  Exercício: dê um exemplo de f tal que $f(x+1) > f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e f não é crescente.

Exemplos:

[9] Estes máximo e mínimo serão mais tarde qualificados como *absolutos*.

1. $f(x) = x^2+1$ par, minorada $\min f = 1$ (minimizante em $x = 0$), não majorada, decrescente em $]-\infty, 0]$, crescente em $[0, +\infty[$, $CD_f = f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$.

2. $f(x) = (x-1)^3$ não é par nem ímpar (simétrica em relação a $x = -1$), não minorada nem majorada, crescente em $\mathbb{R}$, $CD_f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ímpar, não majorada, não minorada, crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, não monótona em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $CD_f = f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Veremos:

4. Função de Heavisde

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   Limitada, monótona crescente (não estritamente), $CD_H = H(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.

5. Função de Dirichlet

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Limitada, não monótona, par, periódica com qualquer período racional ($d(x + r) = d(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$), $CD_d = \{0, 1\}$.

Aula 11 – 8/10/2015

Grande parte das funções que consideramos neste curso são dadas por *somas*, *produtos* e *composição* das chamadas funções elementares:

- polinomiais e racionais,
- exponenciais e logaritmicas,
- trigonométricas

e suas funções inversas. Reparem que, sem ser no caso das polinomiais e racionais (que só envolvem somas, produtos e quocientes) não sabemos calculá-las, nem defini-las rigorosamente, ainda.

NOTA: Assumiremos conhecidas as principais propriedades destas classes de funções, algumas delas veremos / justificaremos ao longo do semestre. Convém (re)verem estas classes e conhecerem os seus gráficos - ver por exemplo, Folhas de CDI-I, Secção 2.2, ou livro J. P. Santos - secção 3. Faremos aqui apenas uma revisão breve.

Classes de funções elementares:

1. *Funções polinomiais* $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $D_f = \mathbb{R}$, no máximo n zeros (rever factorização).

   Gráficos: $f(x) = x^p$, p par, e p ímpar

   $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$,

   $f(x) = (x^2 - 4)(1 - x^2)$

2. *Funções racionais*: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com $p(x), q(x)$ polinomiais, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$

   Gráficos: $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, p par, e p ímpar

   $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

3. *Função exponencial*: $f(x) = e^x$, com $D_f = \mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{R}^+$.

   Pode definir-se como $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ (ou definindo primeiro $e^{\frac{p}{q}}$ com $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e fazendo $e^x = \sup\{e^{\frac{p}{q}} : p/q < x\}$). Ou definindo logaritmo e tomando a inversa. Temos:

   $$e^x \text{ crescente em } \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^y = e^{xy}.$$

   Outras exponenciais: $a^x = e^{x \ln a}$. Notem que se $0 < a < 1$ então a^x é decrescente em $\mathbb{R}$.

   Gráficos

4. *Função logaritmo*: $f(x) = \ln x$ com $D_f = \mathbb{R}^+$, contradomínio $\mathbb{R}$.

   Pode definir-se como inversa de e^x, ou geometricamente: se $a > 1$, $\ln a$ é *área* da região de ordenadas positivas abaixo do gráfico de $1/x$, com x entre 1 e a, se $a < 1$, é negativo da área.[10] Temos

   $$\ln x \text{ crescente em } \mathbb{R}^+, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y \ln x.$$

   Outros logaritmos: $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$.

5. *Funções trigonométricas*: podem definir-se geometricamente a partir do circulo trigonométrico:

   $\operatorname{sen} x, \cos x$ com $D = \mathbb{R}$, periódicas com período 2π, sen ímpar, cos par, e também

   $$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
   $$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

   todas periódicas de período π.

[10] Neste caso, o número e poderia definir-se como a abcissa tal que área = 1, ie, tal que $\ln e = 1$.

Fórmula fundamental: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, dividindo por $\cos^2 x$, temos também

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

(Relembrar outras fórmulas trigonométricas: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ - usaremos).

Operações algébricas: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ então

$$f \pm g, fg : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g} : D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}.$$

Composição: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ então

$$f \circ g : \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

É claro que esta operação não é comutativa: $f \circ g \neq g \circ f$ em geral!

Exemplos:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 2x + 1$:

$$f \circ f(x) = x, \quad g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}, \quad h \circ h = 4x + 3,$$

$$h \circ g(x) = 2\sqrt{x} + 1 \neq g \circ h(x) = \sqrt{2x + 1}$$

2. Domínio de $f(x) = \ln(4 - x^2)$: $D_f =]-2, 2[$.

3. Domínio de $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} + tg(2x)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Função inversa

Dada $f : D \to \mathbb{R}$, queremos inverter a aplicação f, ou seja, se $x \mapsto f(x) = y$, queremos 'recuperar' o valor x a partir do valor $y = f(x)$, para definir uma função

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \text{ sse } y = f(x).$$

É claro que:

i) A equação $y = f(x)$ tem solução se, e só se, $y \in CD_f = f(D)$, ou seja o domínio de f^{-1} será CD_f;

ii) x só fica unívocamente determinado a partir de $y \in f(D)$ se f for *injectiva*, ou seja, se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ para todo } x \in D.$$

Neste caso, a equação $f(x) = y$ tem *no máximo* uma solução em D (se existir, é única).

Exercício: Se f é estritamente monótona, então é injectiva. O recíproco não é verdade: por ex. $f(x) = 1/x$ é injectiva, mas é não monótona em $D = \mathbb{R} \setminus 0$ (porquê?)

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ injectiva, $CD_f = f(D)$, define-se a *função inversa* de f como

$$f^{-1} : f(D) \to D \subset \mathbb{R}, \quad y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ tal que } f(x) = y.$$

É claro que temos sempre, quando definidas,

$$(f \circ f^{-1})(y) = y,\ y \in D_{f^{-1}} = CD_f, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x,\ x \in D_f, \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

(Relembrem que o gráfico de uma função e da sua inversa são simétricos em relação à recta $y = x$.) Pode ver-se também (Exercício) que

$$f \text{ crescente / decrescente em } D \Rightarrow f^{-1} \text{ crescente / decrescente em } f(D).$$

NOTA:

– f diz-se *sobrejectiva* se $CD_f = \mathbb{R}$, assumindo $f : D \to \mathbb{R}$, [11] ou seja a equação $f(x) = y$ tem sempre, pelo menos, uma solução em D, para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

– $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se *bijectiva* se for injectiva e sobrejectiva. Neste caso, a equação $f(x) = y$ tem sempre solução única em D, para todo $y \in \mathbb{R}$ e a respectiva função inversa está definida em $\mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $f(x) = x^p$, p ímpar, é sobrejectiva, a sua inversa é $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y}$

$$y = x^p \Leftrightarrow x = \sqrt[p]{y}.$$

2. $f(x) = x^p$, p par, não é injectiva. Para definirmos uma função inversa, restringimos o domínio a $\mathbb{R}_0^+$ onde f é injectiva, ou seja resolvemos a equação $y = x^p, x \geq 0$. A sua inversa é $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y}$

$$y = x^p \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[p]{y}.$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é injectiva, a sua inversa é $f^{-1} = f$.

   Mais geralmente, $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ então $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\sqrt[p]{y}}$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, se p é ímpar, e em $\mathbb{R}^+$, se p é par.

4. $f(x) = e^x$ é injectiva, com contradomínio $\mathbb{R}^+$. A sua inversa é $f^{-1}(y) = \ln y$.

Funções trigonométricas inversas:

As funções sen, cos e tg não são injectivas em $\mathbb{R}$, são até periódicas, e portanto não têm inversa definida: para cada $y \in [-1, 1]$, a equação $\operatorname{sen} x = y$ tem infinitas soluções.

[11] $f : A \to B$ diz-se sobrejectiva se $f(A) = B$, ou seja, se a imagem é todo o conjunto de chegada B - dado.

Mas se restringirmos o domínio a um intervalo onde a função sen é injectiva, por convenção, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$[12] temos apenas *uma* solução, a que chamamos arcsen y:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = y \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcsen} y.$$

Por exemplo, $\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$, já que $\operatorname{arcsen} 1 = x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, e da mesma forma, $\operatorname{arcsen} 0 = 0$, $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Define-se assim uma função, *crescente* (já que sen é crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) tal que

$$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}.$$

Para o cos procede-se de forma semelhante, mas temos de escolher um outro intervalo para os angulos (ou os arcos) pretendidos (cos não é injectivo em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$...) Vamos tomar o intervalo $[0, \pi]$, onde cos é injectivo e toma todos os valores de $[-1, 1]$:

$$\begin{cases} \cos x = y \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos y.$$

Define-se assim uma função *decrescente* (já que cos é decrescente em $[0, \pi]$) tal que

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \subset \mathbb{R}.$$

Para a tg escolhe-se o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = y \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} y.$$

Nestes caso, a função inversa está definida em $\mathbb{R}$, já que o contradomínio da tg é $\mathbb{R}$, e temos uma função *crescente* em $\mathbb{R}$ e limitada,

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Aula 12 – 9/10/2015

Funções trigonométricas inversas:

$$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Exemplos:

$$\operatorname{arcos}(-1) = \pi, \ \operatorname{arcos}(1/2) = \pi/3, \ \operatorname{arcos}(\cos(-\pi/3)) = \pi/3,$$

$$\operatorname{arctg}(1) = \pi/4, \ \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4, \ \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi/3,$$

[12] Há muitos outros intervalos que podíamos escolher, mas esta escolha é convenção usual.

$$\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4, \ \operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2)) = -\pi/3.$$

Antes de passarmos à definição de limite, vemos ainda uma outra classe de funções, definidas a partir de exponenciais.

Funções hiperbólicas: definem.se as funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico*, de domínio $\mathbb{R}$, como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

e $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Temos sh é ímpar, ch é par, e $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$.

É fácil ver que estas funções verificam

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

e que portanto o ponto $(\cosh t, \sinh t)$ está na linha de equação $x^2 - y^2 = 1$, que é uma hiperbole. (Ver fichas para mais propriedades destas funções.)

A função sh é injectiva em $\mathbb{R}$, com contradomínio $\mathbb{R}$, e ch é injectiva em $\mathbb{R}_0^+$, com contradomínio $[1, +\infty[$. As suas inversas são

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}.$$

Exercício: encontrar expressões para inversas (dependendo de ln)

Limite de funções em $\mathbb{R}$

Queremos agora definir uma das noções centrais do cálculo: a noção de limite para funções em $\mathbb{R}$, que será essencial na definição de derivada, no estudo de funções, de integral, já que nos permite definir noções 'novas' (como dividir por 0 por ex.), aproximando por quantidades conhecidas, e 'tomando o limite'.

Limites quando $x \to \pm\infty$:

Vamos primeiro considerar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, que são análogos à noção que já definimos de limite para *sucessões* (ou seja, funções em $\mathbb{N}$, com $n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$).

Reparem que nem sempre faz sentido considerar estes limites, só se o dominio D de f contiver pontos arbitrariamente 'grandes', ou seja tal que $D \cap [R, +\infty[\neq \emptyset$, $\forall R > 0$.[13] Entao a(s) seguinte(s) definições são naturais:

Definição 2.1 (Limites no infinito)**.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$, D como acima.

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ se dado $\epsilon > 0$ (margem de erro em y) existe $R > 0$ tal que

$$x \in D \wedge x > R \ \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

E também:

[13] Por exemplo, se o domínio for $[-1, 1]$ naõ faz sentido considerar o comportamento no infinito, já que a função não está definida.

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$x \in D \wedge x > R \ \Rightarrow f(x) > M.$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$x \in D \wedge x > R \ \Rightarrow f(x) < -M.$$

Também podemos considerar $x \to -\infty$, fazendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x),$$

(assumindo agora que $D\cap] - \infty, -R[\neq \emptyset,\ \forall R > 0$), por exemplo, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ se dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$x \in D \wedge x < -R \ \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Exemplos:

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$, $p > 0$, já que , para $x > 0$, $\left|\dfrac{1}{x^p} - 0\right| = \dfrac{1}{x^p}$, e, dado $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{x^p} < \epsilon \ \Leftrightarrow \ x > \sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}},$$

logo podemos tomar $R = \sqrt[p]{\dfrac{1}{\epsilon}}$.

Também temos $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$.

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, já que, para $x > 0$,

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{x+1}\right| = \frac{1}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Por exemplo, temos $0.99 < \dfrac{x}{x+1} < 1$ se tomarmos qualquer $x > \dfrac{1}{10^{-2}} - 1 = 99$.

Também temos $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$.

3. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

4. $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Limite num ponto $a \in \mathbb{R}$:

Definimos $\lim_{x\to a} f(x)$ para pontos a 'suficientemente próximos' do domínio D de f, mas *não necessariamente $a \in D$.*

Genericamente, a ideia é: existirá limite $= b$ quando $x \to a$ se se puder fazer o erro $|f(x) - b|$, nas ordenadas, tão 'pequeno' quanto se queira, desde que $x \in D$ se aproxime o suficiente de a, nas abcissas, com $x \neq a$ (ou seja que $|x-a|$ seja suficientemente 'pequeno', mas $|x-a| \neq 0$).

Para isso, temos de assumir que a é tal que *qualquer* vizinhança de a contém pontos de D, excluindo a:

$$(V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.^{14}$$

Neste caso, a diz-se *ponto de acumulação* de D. Admitindo que as vizinhanças de infinito são dadas por $V_R(+\infty) =]R, +\infty[$ e $V_R(-\infty) =]-\infty, -R[$, a noção acima pode estender-se a $\overline{\mathbb{R}}$.

Por exemplo, se $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ podemos tomar o limite quando $x \to 2$ assim como em qualquer outro ponto de $\overline{\mathbb{R}}$. Se $D =]a, b[$ podemos tomar o limite em qualquer ponto de $[a, b]$. (Em geral, é intuitivo...) Se $D = \mathbb{N}$, tomamos limite só quando $n \to \infty$ (porquê?)

Definição 2.2 (Limite em $\mathbb{R}$ - definiçao de Cauchy)**.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D.

Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ (margem de erro nas ordenadas) existe um $\delta > 0$ (nivel de exigencia nas abcissas) tal que

$$x \in D \ \wedge \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

ou equivalente: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \ \wedge \ x \neq a, \ a - \delta < x < a + \delta \ \Rightarrow \ b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Notem que $0 < |x-a| \Leftrightarrow x \neq a$. Claro que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} f(x) - b = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$$

Exemplo:

1. Considere $f(x)$ a velocidade média entre x e 1 para um deslocamento dado por $2x^2$:

   $$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 2(x+1), \ x \neq 1$$

   Vamos determinar $\lim_{x\to 1} f(x)$ - velocidade instantânea em $x = 1$.

   Um candidato razoável é $b = 4$. Para verificarmos, calculamos:

   $$|f(x) - 4| = |2(x+1) - 4| = |2x - 2| = 2|x - 1|.$$

   Logo, quando $x \to 1$, ou seja se $|x-1|$ é 'pequeno', temos $f(x) \to 4$, ou seja, $|f(x) - 4|$ é 'pequeno'. Mais precisamente: dado $\varepsilon > 0$, fazendo $\delta = \epsilon/2$ temos

   $$x \in D \ \wedge \ |x - 1| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - 4| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

   Por exemplo, se quisermos garantir que $3.9 < f(x) < 4.1$, ou seja erro $= \varepsilon = 0.1$, é suficente tomar x tal que $0.95 < x < 1.05$, ou seja $\delta = \epsilon/2 = 0.05$.

   (Também temos, para $a \in D$, $\lim_{x\to a} f(x) = 2(a+1) = f(a)$, e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.)

2. $f(x) = x + 1$, $x < -1$ e $f(x) = x + 2$, se $x \geq -1$: não existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.

   Para ver, por exemplo, que $\lim_{x\to -1} f(x) \neq 1$: se $x < -1$, temos $|f(x) - 1| = |x| > 1$. Logo, se $\varepsilon < 1$, existe sempre $x \in V_\delta(-1) =]-1-\delta, -1+\delta[$ tal que $|f(x) - 1| > \epsilon$, basta tomar $-1 - \delta < x < -1$.

   Da mesma forma se pode ver que $\lim_{x\to -1} f(x) \neq b$, para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

[14] Claro que se $a \notin D$, $V_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \cap D = V_\varepsilon(a) \cap D$.

Aula 13 – 13/10/2015

Limites num ponto $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ se para qualquer margem de erro $\varepsilon > 0$ em y existe um nível de exigência $\delta > 0$ em x tal que

$$\begin{aligned} & x \in D \ \wedge \ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & x \in D \ \wedge \ x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in V_\varepsilon(b). \end{aligned}$$

(se a é ponto de acumulação de D, ie, está 'suficientemente próximo' de D)

APLICAÇÕES (que veremos):

- estudo de funções;
- comparação de funções através de $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$; em particular, compreender *limites notáveis* - o que querem dizer, que informação dão sobre as funções;
- definir continuidade e estabelecer propriedades de funções contínuas (e.g $f(0) > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ então f tem máximo);
- definir diferenciabilidade, recta tangente.

Exemplos:

1. $f(x) = c$ (constante) então $\lim_{x\to a} f(x) = c$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, já que neste caso $|f(x) - c| = 0$, $\forall x$.
2. $f(x) = mx$ função linear, $m \neq 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = ma$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, já que
$$|f(x) - ma| = |m|\,|x-a| < \varepsilon, \text{ se } |x-a| < \delta = \varepsilon/|m|.$$
3. $f(x) = 2x$, se $x \neq 1$ e $f(1) = 3$. Então $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ - NÃO depende do valor de $f(1)$ (só tomamos $x \in D$ com $x \neq 1$)
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, +\infty[$. Neste caso consideramos $a \in D$ e $\lim_{x\to a} = \sqrt{a} = f(a)$, já que
$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$
logo, dado erro $\epsilon > 0$, temos $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$, desde que se tome $|x-a| < \sqrt{a}\epsilon$
5. Função de Heaviside:
$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$
Se $a \neq 0$, temos H é constante numa vizinhança de a, logo, se $a > 0$ temos $\lim_{x\to a} H(x) = \lim_{x\to a} 1 = 1$ e, se $a < 0$ temos $\lim_{x\to a} H(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0$.

   Se $a = 0$, não existe $\lim_{x\to 0} H(x)$. Por exemplo, $|H(x) - 1| = 0$, se $a < 0$ e $|H(x) - 1| = 1$, se $a < 0$, logo o erro $|H(x) - 1|$ não pode ser 'tão pequeno quanto se queira' numa vizinhança de 0 (para valores negativos é sempre 1), e o mesmo se passa com $|H(x) - b|$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

6. Função de Dirichlet

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

não existe $\lim_{x\to a} d(x)$ em qualquer $a \in \mathbb{R}$.

PROPRIEDADES DO LIMITE:

1. O limite se existir, é único.
2. O limite quando $x \to a$ só depende dos valores de f numa vizinhança de a (chama-se definição *local*), mas, se $f(a)$ estiver definido, NÃO depende de $f(a)$.
3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ então f é limitada numa vizinhança de a.

Limites infinitos em $a \in \mathbb{R}$: podemos tomar $b \in \overline{\mathbb{R}}$: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se dado $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > R$$

e de forma análoga para $b = -\infty$. Nestes casos, f não é limitada em qualquer vizinhança de a.

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, já que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = -\infty$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Limites laterais: definimos

$$f(a^+) = \lim_{x\to a, x>a} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x\to a, x<a} f(x),$$

ou seja, $f(a^+)$, $f(a^-)$ existem em $\mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, existe sempre $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \ \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a^+)| < \varepsilon,$$

$$x \in D \ \wedge \ a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a^-)| < \varepsilon.$$

Se $f(a^+) = \pm\infty$ ou $f(a^-) = \pm\infty$, diz-se que f tem uma *assimptota vertical* em a (explode em tempo finito).

É fácil ver que temos a seguinte *definição equivalente* de limite:

Proposição 2.3. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *existe em* $\mathbb{R}$ *se e só se existem* $f(a^+)$ *e* $f(a^-)$ *e*

$$f(a^+) = f(a^-) = b$$

(sempre que a seja um ponto de acumulação de $D \cap] - \infty, a[$ *e de* $D \cap]a, +\infty[$*).*

Exemplos

1. No caso da função de Heaviside acima, vemos que

$$H(a^+) = 1 \neq H(a^-) = 0$$

e conclui-se imediatamente que $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe.

2. $f(x) = |x|$: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; em geral $\lim_{x\to a} f(x) = |a| = f(a)$.

Notem que nem sempre é útil separar os casos a^+ e a^-. Tipicamente, só quando a função em causa é dada por expressões diferentes quando $x > a$ ou $x < a$. Por exemplo, para a função de Dirichlet vista acima, seria conveniente tomar $\lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}}$ e $\lim_{x\to a, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

Mais geralmente, podemos definir *limites segundo subconjuntos A do domínio*, se a ainda for ponto de acumulação de A (a ideia é só tomarmos pontos de A em consideração quando calculamos o limite):

$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \subset D \ \wedge\ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Os limites laterais correspondem a considerar $A = D \cap]a, +\infty[$ e $A = D \cap]-\infty, a[$. É claro que que se existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$, então para qualquer $A \subset D$, temos $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = b$. O reverso também é verdadeiro (basta tomar $f(a^+)$e $f(a^-)$. Temos assim:

Proposição 2.4. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, e a um ponto de acumulação de D. Existe* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, se e só se*

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$$

para qualquer $A \subset D$ tal que a é um ponto de acumulação de A.

Este resultado diz essencialmente que $\lim_{x\to a} f(x)$ não depende da forma como x se aproxima de a.

Exemplo: Função de Dirichlet: para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}} d(x) = 1, \qquad \lim_{x\to a, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} d(x) = 0.$$

Como são diferentes, o limite quando $x \to a$ não existe.

Aula 14 – 15/10/2015

Limites segundo subconjuntos A do domínio $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$: $x \in A$ é visto como forma de aproximação de a (pela direita ou esquerda, por números racionais ou irracionais, etc.)

Como vimos no capítulo anterior, as *sucessões* são uma forma bastante útil de aproximar números reais. Mais precisamente, se tomarmos uma sucessão $a_n \to a$, $a_n \neq a$ e o conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{a_n\to a} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

É claro que se existir $\lim_{x\to a} f(x) = b$ então como não depende da forma de aproximação a a, teremos $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$, para qualquer sucessão $a_n \to a$. O recíproco também é verdadeiro (mais difícil de ver):

Teorema 2.5 (Definição equivalente no sentido de Heine). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Então $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se, e só e, para qualquer sucessão $a_n \to a$, $a_n \neq a$, tem-se $f(a_n) \to b$, $n \to \infty$.*

Demonstração. (Ideia): Se $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$, pode construir-se uma sucessão (a_n) tal que $a_n \to a$ e $f(a_n) \nrightarrow b$ (existe ϵ tal que para qualquer $\delta > 0$ encontramos x com $|x-a| < \delta$ e $|f(x) - b| > \varepsilon$ - tomamos $\delta = 1/n$ e $x = a_n$). □

Esta definição equivalente de limite segundo sucessões chama-se por vezes limite no *sentido de Heine*, enquanto que a definição usando vizinhanças se diz no *sentido de Cauchy*.

Esta definição é útil para mostrar que certos limites não existem:

Exemplos:

1. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ não existe: com $f(x) = \operatorname{sen} x$ tomando sucessões $x_n = n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, temos $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ e
$$\lim f(x_n) = 0 \neq \lim f(y_n) = 1.$$
(Da mesma forma: não existe limite em $+\infty$ de qualquer função periódica - Exercício.)

2. $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ não existe: com $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, tomando sucessões $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, temos $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e
$$\lim f(x_n) = \lim(\cos 2n\pi) = 1 \neq \lim f(y_n) = \lim\cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 0.$$

Para estudarmos limites (e vermos a continuidade das funções elementares), é útil o seguinte resultado (vimos análogo para sucessões):

Teorema 2.6 (Limite por enquadramento). *Seja $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$ e f uma função tal que, numa vizinhança de a, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Então existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$.*

A prova é igual ao caso das sucessões (ou pode usar-se a definição de limite segundo sucessões).

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, já que $-x \leq x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x$.
2. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

Em particular temos a seguinte consequência: o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.

Proposição 2.7. *Se $f(x) = g(x)h(x)$ em que g é limitada numa vizinhança de a e $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*

Demonstração. Se $m \leq g(x) \leq M$ então $mh(x) \leq f(x) \leq Mh(x)$ e o resultado sai dos limites enquadrados. □

Exercício: mostre a seguinte versão de limites enquadrados para limites infinitos: se $f(x) > g(x)$ numa vizinhança de a então

(i) se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$;

(ii) se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Exemplo: $\lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$.

Antes de vermos resultados que nos permitem calcular limites mais facilmente, damos a primeira aplicação da definição de limite:

Continuidade

Já vimos que podemos definir limite em pontos a que não estão no domínio de uma dada função f, e que, mesmo que $a \in D_f$, o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$, se existir em $\mathbb{R}$, é independente de $f(a)$. Claro que nesse caso, podemos comparar $f(a)$ com o limite obtido. Temos:

Definição 2.8. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$.[15] Então f diz-se *contínua em a* se existe em $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

ou seja, se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \ \wedge \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Exemplos:

1. Função linear $f(x) = mx + b$ contínua em $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ contínua em $[0, +\infty[$
3. $f(x) = |x|$ contínua em $\mathbb{R}$
4. Função de Heaviside: contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5. Função de Dirichlet: não é contínua em qualquer ponto.
6. $f(x) = xd(x)$, em que $d(x)$ é a função de Dirichlet então f é contínua em 0:
$$0 \le xd(x) \le x,\ x > 0,\ x \le xd(x) \le 0,\ x < 0,$$
logo $\lim_{x\to 0} xd(x) = 0 = f(0)$. Não é contínua em qualquer outro ponto.

Dos resultados já vistos para limites, temos as seguintes *definições equivalentes:*

- Limites laterais: f é contínua em $a \Leftrightarrow$ existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$ e $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.
- Continuidade à Heine: f é contínua em $a \Leftrightarrow$ para qualquer sucessão $a_n \to a$, , tem-se $f(a_n) \to f(a)$, $n \to \infty$, ou seja
$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n).$$

[15] assume-se ainda que a é um ponto de acumulação de D. Por exemplo, se $D = \{0\} \cup]1, +\infty[$ não faz sentido falar de continuidade em 0, porque 0 não é ponto de acumulação.

Vemos agora resultados que nos permitem calcular limites e estabelecer continuidade de funções:

Proposição 2.9 (Limite e operações algébricas). *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = c$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b, c \in \mathbb{R}$, *então*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = b + c$,

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$,

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, *se* $c \neq 0$.

Demonstração. Podemos provar directamente - como para sucessões - ou usar os resultados análogos para sucessões e a definição de limite segundo Heine: por exemplo, para (i), dada $a_n \to a$, $a_n \neq a$, é suficiente ver que $(f \pm g)(a_n) = f(a_n) \pm g(a_n) \to f(a) \pm g(a)$. □

NOTA:

1. Os resultados acima podem ser dados também em $\overline{\mathbb{R}}$, com as convenções já vistas para as operações algébricas em $\overline{\mathbb{R}}$, eliminando as indeterminações $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Se $c = 0$ e $g(x) > 0$ numa vizinhança de a então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, dependendo de $b > 0$ ou $b < 0$.

   Se $b = c = 0$, o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ dá-nos uma comparação da ordem dos infinitésimos $f(x)$ e $g(x)$ quando $x \to a$: por exemplo,

   $$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^n}{(x-a)^m} = 0, \text{ se } n > m$$

   e escrevemos $(x-a)^n << (x-a)^m$ quando $x \to a$, se $n > m$.

   Se $b = c = \infty$, o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ dá-nos uma comparação da ordem dos infinitamente grandes $f(x)$ e $g(x)$ quando $x \to a$: por exemplo,

   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{x^m} = +\infty, \text{ se } n > m$$

   e escrevemos $x^m << x^n$ quando $x \to +\infty$, se $n > m$.

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0} x\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right) = 0$;

2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + x}{x^4 + x^3} = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x}{x^4 + x^3} = +\infty$.

Proposição 2.10 (Continuidade e operações algébricas). *Se* f, g *são contínuas em* a *então* $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ *(se* $g(a) \neq 0$*) são contínuas em* a.

Exemplos:

1. Funções polinomiais são contínuas em $\mathbb{R}$: somas e produtos de contínuas (lineares - já vimos)

2. Funções racionais são contínuas no seus domínio: quocientes de contínuas.

O seguinte resultado é muito útil, e permite-nos essencialmente fazer mudanças de variável ao calcular limites.

Proposição 2.11 (Limite da função composta)**.** *Se existem $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e $\lim_{y\to b} f(y) = c$, e f é contínua em b ou $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a, então*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Demonstração. Vamos usar a definição de Cauchy: dado $\epsilon > 0$:
– como $\lim_{y\to b} f(y) = c$, existe $\gamma > 0$ tal que $0 < |y - b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \epsilon$, e se $f(b) = c$, então podemos tomar

$$|y - b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \epsilon.$$

– como $\lim_{x\to a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que, para $\gamma > 0$ dado acima

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma.$$

Logo, fazendo $y = g(x)$, temos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \epsilon.$$

(Se $g(x) \neq b$ temos sempre $0 < |g(x) - b|$ e o resultado também sai.) □

Exercício: prove o resultado acima usando a definição de limite à Heine.

Um caso bastante útil é

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(-x).$$

Quanto à continuidade:

Teorema 2.12 (Continuidade da função composta)**.** *Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$ então $f \circ g$ é contínua em a,*

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to g(a)} f(y) = f(g(a)).$$

Em particular, se f e g forem contínuas nos seus domínios, também $f \circ g$ será contínua no seu domínio.

Aula 15 – 16/10/2015

Continuidade de funções elementares:

1. Continuidade das funções trigonométricas: vem de $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$:

   Temos, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \operatorname{sen} x < x$, já que x é o comprimento de arco. Logo $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(-x) = -\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ (sen é ímpar).

   Usando o limite da composta e

   $$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

   $$\cos x - \cos a = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

   temos

   $$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

   ou seja, sen e cos são contínuas em $\mathbb{R}$. Temos também que tg, cotg, sec e *cosec* são contínuas nos seus domínios (quocientes de funções contínuas)

2. Para ver a continuidade de e^x e $\ln x$ nos seus domínios,[16] é suficiente ver que

   $$\lim_{x\to 0} e^x = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \ln x = 0$$

   já que neste caso

   $$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{x\to a} e^a\, e^{x-a} = e^a,\ a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to a} \ln x = \lim_{x\to a} \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \ln a = \ln a,\ a > 0.$$

   Os limites acima podem justificar-se por enquadramento, usando as desigualdades (equivalentes)

   $$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x},\ x < 1, \qquad \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

   (A segunda desigualdade segue da definição de $\ln x$ como a área debaixo do gráfico de $1/x$ entre 1 e x: comparar $\ln x$ com a área dos rectângulos de base $[1, x]$ e altura 1 e $\frac{1}{x}$.)

Outros exemplos:

1. Funçoes hiperbolicas: $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ contínuas em $\mathbb{R}$.

2. Funções tipo potência-exponencial: para $a(x) > 0$,

   $$f(x) = a(x)^{b(x)} = e^{\ln(a(x)^{b(x)})} = e^{b(x)\ln(a(x))}$$

   é contínua sempre que $a(x)$ e $b(x)$ forem (composição de funções).

[16]veremos que inversas de funções contínuas são contínuas, logo bastaria ver para uma destas funções

Limites notáveis: Também podemos usar enquadramento para justificar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

(são todos indeterminações $\frac{0}{0}$, veremos melhor o seu significado em breve quando estudarmos derivadas).

Para o primeiro limite, pode ver-se geometricamente que

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\ \text{para } x \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Logo, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,\quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

e por enquadramento,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Para os outros limites usam-se as desiqualdades

$$x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x},\ x<1, \qquad \frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1,\ x>0,$$

que se podem escrever como

$$1 \le \frac{e^x-1}{x} \le \frac{1}{1-x},\ 0<x<1, \qquad \frac{1}{x} \le \frac{\ln x}{x-1} \le 1\ x>0.$$

Exemplos:

1. $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (mudança de variável)
2. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}=2.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2x^2}=\frac{1}{2}.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x}=-1.$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$

8. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{\ln(1+x)}{x}} = e$. Em particular, usando a definição de limite segundo Heine (sucessões) temos que se $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ então

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Prolongamento por continuidade:

Já vimos que só faz sentido definir continuidade num ponto se esse ponto estiver no domínio. Em geral, tomando pontos que não estão no domínio, pode considerar-se a questão seguinte: será que haverá forma de incluir esse ponto - ou seja, estender o domínio - no domínio, por forma a que a função resultante fique contínua?

Exemplos: $\ln x$, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

Definição 2.13. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D, com $a \notin D$. Então f diz-se *prolongável por continuidade a a* se existe em $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função $F : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ b, & \text{se } x = a \end{cases}$$

é contínua em a e diz-se o *prolongamento contínuo* de f.

Exemplos:

1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ não é prolongável por continuidade a $x = 0$
2. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ é prolongável por continuidade a $x = 0$
3. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ não é prolongável por continuidade a $x = 0$, mas $xf(x)$ sim.

Propriedades das funções contínuas

Se f é contínua em $a \in D$ (ponto de acumulaçao do domínio):

- f é limitada numa vizinhança de a (é suficiente que exista $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$);
- Se $f(a) > 0$ então f positiva numa vizinhança de a. Em particular, se f, g são contínuas em a então $f(a) > g(a) \Rightarrow f(x) > g(x)$ numa vizinhança de a.

Se f contínua em a então contínua numa vizinhança de a? NÃO, por ex. $f(x) = xd(x)$ em que d é função de Dirichlet é contínua apenas em 0. (Exercício: em que pontos são contínuas as funções $(1 - x^2)d(x)$, $(\operatorname{sen} x)d(x)$?)

A intuição que temos de continuidade vem de considerarmos em geral funções *contínuas em intervalos.*

Continuidade em intervalos[17]: vamos assumir que f é contínua num *intervalo I* qualquer.

Teorema 2.14 (T. Valor Intermédio ou de Bolzano)**.** *Seja f contínua num intervalo I e $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$. Se $f(a) < \alpha < f(b)$ ou $f(b) < \alpha < f(a)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Demonstração. Vamos assumir $f(a) < f(b)$ (se $f(a) > f(b)$ é análogo). Tomamos

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

Então A é não vazio, já que $a \in A$ e majorado, já que $A \subset [a, b]$ (b é majorante). Logo existe

$$c = \sup A.$$

Vamos ver $f(c) = \alpha$. Para isso, usamos continuidade para ver que os casos $f(c) > \alpha$ e $f(c) < \alpha$ são impossíveis:

- Se fosse $f(c) > \alpha$, então, porque f é contínua em c, teríamos $f(x) > \alpha$ numa vizinhança de c, ou seja
$$x \in]c - \delta, c + \delta[\;\Rightarrow\; f(x) > \alpha$$
o que é imposível, já que nesse caso $c - \delta$ seria majorante de A e c é supremo (menor dos majorantes). Em particular, $c \neq b$.

- Se fosse $f(c) < \alpha$, então, porque f é contínua em c, teríamos $f(x) < \alpha$ numa vizinhança de c, ou seja
$$x \in]c - \delta, c + \delta[\;\Rightarrow\; f(x) < \alpha$$
De novo, é impossível, já que nesse caso $]c, c + \delta[\subset A$ e c não seria majorante de A.

Conclui-se que $f(c) = \alpha$. □

Aula 16 – 20/10/2015

Estamos a ver propriedades das funçoes continuas em intervalos. Vimos T. Valor Intermedio / Bolzano, que se pode escrever nas 3 formulaçoes equivalentes seguintes:

Se f contínua num intervalo $[a, b]$, com $f(a) < f(b)$ (por exemplo) entao:

(i) para qualquer α tal que $f(a) < \alpha < f(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$.

$\Leftrightarrow$

[17] que, à partida, pode ser de qualquer das forma $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$,$[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$.

(ii) A equação $f(x) = \alpha$ tem pelo menos uma solução em $]a, b[$, para qualquer $\alpha \in]f(a), f(b)[$.

$\Leftrightarrow$

(iii) $[f(a), f(b)]$ está contido no contradomínio (imagem) de f.

APLICAÇOES: soluções de equações, existencia de pontos fixos (tal que $f(x) = x$), contradomínios.

Notem que:

- Se o dominio não for um intervalo, não é necessariamente verdade: por exemplo, $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ então $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, mas nao existe soluçao para $f(x) = 1/2$ - temos $CD_f = [-1, 0] \cup [1, 2]$.
- Se a funçao não for contínua, não é necessariamente verdade: por exemplo, $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1, x \geq 0$. Entao $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, mas f não tem zeros.

COROLÁRIOS:

1. Se f contínua em I, $a, b \in I$ e $f(a)f(b) < 0$ então f tem pelo menos um zero em $]a, b[$. [18]

   Em particular, se f não tem zeros em $]a, b[$ então tem sempre o mesmo sinal.

2. Se f, g, contínuas em I, $a, b \in I$ e $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$ então $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução em $]a, b[$ (basta tomar $f - g$).

3. *Teo. Valor Intermédio com limites* (muito útil): se f é contínua num intervalo (aberto) $]a, b[$ e
$$\lim_{x\to a^+} f(x) < \alpha < \lim_{x\to b^-} f(x),$$
   então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$.

   Prova (ideia): da definição de limite, existem $a', b' \in]a, b[$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) < f(a') < \alpha < f(b') < \lim_{x\to b} f(x)$ e $a' < b'$. Aplicando o Teo. do Valor Intermédio em $[a', b']$ temos o pretendido.

Exemplos:

1. $e^x + \sqrt{x} = \sqrt{2}$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$ (aliás: em $]0, 1[$)

2. Qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos um zero: por ex. $p(x) = x^7 - x^4 + 3$, então $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ logo existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$.

   Mais do que isso: contradomínio de p é $\mathbb{R}$.

O resultado anterior tem outra consequência importante, que nos dá informação sobre contradomínios *funções contínuas transformam intervalos em intervalos*:

– Se f e *monótona* e contínua em $I =]a, b[$ entao $f(]a, b[) =]f(a^+), f(b^-)[$, se f crescente, ou $]f(b^-), f(a^+)[$, se f decrescente. (Nota: $f(a^+), f(b^-)$ existem sempre em $\overline{\mathbb{R}}$ - Exercício.)

[18]Este corolário e por vezes conhecido como Teo. de Bolzano.

– Em geral, temos sempre que $f(]a,b[)$ é um intervalo de extremos r e s,

$$]r,s[\subset f(]a,b[)\subset [r,s]$$

em que $s=\sup\{f(x):x\in I\}=\sup f(I)$ e $r=\inf\{f(x):x\in I\}=\inf f(I)$ em $\overline{\mathbb{R}}$. O intervalo será fechado / aberto nos extremos dependendo de f ter máximo ou mínimo em I

Corolário 2.15. *Se I é um intervalo e f é contínua em I então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. (Ideia) Sejam $s=\sup\{f(x):x\in I\}=\sup f(I)$ e $r=\inf\{f(x):x\in I\}=\inf f(I)$ em $\overline{\mathbb{R}}$. Então, da definição de sup e inf, temos que f assume valores arbitrariamente próximos de s e r e do Teo. Valor Intermédio, segue-se que $]r,s[\subset f(I)$.

Por outro lado, r é minorante de $f(I)$ e s é majorante de $f(I)$, logo $f(I)\subset[r,s]$. Conclui-se que $f(I)$ é um intervalo com extremos r e s. □

Exemplos:

1. $f(x)=\operatorname{sen}x$: $f(\mathbb{R})=[-1,1]$, $f(]-\pi,0])=[-1,0]$, $f(]-3\pi,3\pi[)=[-1,1]$.
2. $f(x)=\ln x$: $f(]0,1[)=]-\infty,0[$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

É fácil ver que esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas: podemos ter $f(I)$ intervalo sem que f seja contínua, por ex., $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ e $f(0)=0$, ou $f(x)=x+1$, $x\leq 0$, $f(x)=x$, $x>0$. Mas se f é monótona:

Teorema 2.16. *Se f é estritamente monótona em I e $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua em I.*

Demonstração. Seja $a\in I$, a no interior de I. Se f é monótona, existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$ para qualquer $a\in I$ (Exercício!).

Assumindo f crescente (para decrescente é análogo) temos $f(a^+)\leq f(a)\leq f(a^-)$ e também $f(x)<f(a^-)$, se $x<a$, $f(x)>f(a^+$, se $x>a$. Se fosse $f(a^+)\neq f(a^-)$, então $]f(a^-),f(a^+)[$ não estaria na imagem de f e $f(I)$ não seria um intervalo. Logo $f(a^+)=f(a)=f(a^-)$ □

Teorema 2.17 (Continuidade da função inversa)**.** *Se $f:I\to\mathbb{R}$ é injectiva e contínua num intervalo I, então $f^{-1}:J\to\mathbb{R}$ é contínua no intervalo $J=f(I)$.*

Demonstração. f injectiva e contínua num intervalo $I\Rightarrow f$ é estritamente monótona e f^{-1} também será. Como $f^{-1}(J)=I$ é um intervalo, conclui-se do resultado anterior que f^{-1} é contínua. □

Exemplos: Da continuidade das funções trigonométricas, também arcsen, arccos, arctg são funções contínuas nos seus domínios.

Vimos que se I é um intervalo e f é contínua em I então $f(I)$ é sempre um intervalo da forma

$$]r,s[,\ [r,s[,\ ]r,s],\ [r,s].$$

dependendo de ter mínimo e/ou máximo. É fácil ver que em geral qualquer dos casos é possível. Mas se $I=[a,b]$ é intervalo limitado e fechado temos sempre:

Teorema 2.18 (Teorema Weiertstrass). *Seja f uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$. Então f tem máximo e mínimo em I.*

Demonstração. A prova faz-se em duas partes: primeiro vemos que é limitada em $I = [a, b]$, ou seja, pelo Ax. do Supremo, tem sup e inf em I. Depois verifica-se que $\sup f$ é máximo e $\inf f$ é mínimo.

– f é limitada em $[a, b]$: considere-se o conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ é limitada em } [a, x]\}.$$

Então A é majorado e não-vazio ($a \in A$), logo existe $s = \sup A$ e $s \leq b$. Como f é contínua (à esquerda) em a, é limitada numa vizinhança $[a, a + \varepsilon[$, logo $s > a$. Se $s < b$ teríamos também f limitada em $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$, logo seria limitada em $[a, s + \varepsilon]$, o que é impossível, já que $s = \sup A$. Conclui-se que $s = b$ e que f é limitada em $[a, b]$.

– Sejam $M = \sup_{[a,b]} f$ e $m = \inf_{[a,b]} f$. Vamos ver que M é máximo. Procedemos por contradição: se M não é máximo, então $M \neq f(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, e portanto a função

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

está bem definida em $[a, b]$ e é contínua (e positiva).

Assim, do que vimos acima, teríamos que g é limitada. Mas se existe um majorante $K > 0$

$$g(x) < K \Leftrightarrow \frac{1}{M - f(x)} < K \Leftrightarrow f(x) < M - \frac{1}{K}$$

o que é impossível, dado que M é o supremo de f (neste caso, $M - \frac{1}{K} < M$ é majorante).

Conclui-se então que M é máximo de f em $[a, b]$. (Para mínimo é analogo.)

□

Em particular, segue-se do Teorema do Valor Intermédio que a imagem do intervalo $I = [a, b]$ é $f([a, b]) = [m, M]$, em que m, M são os mínimo e máximo de f em I, respectivamente.

Exemplos:

1. $f(x) = |x|$, $f[-1, 1]) = [0, 1]$, $f(]-1, 1[) = [0, 1[$, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, $f[2, 3]) = [2, 3]$.
   (podem não ser extremos de f!)

2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$, $f([-1, 1] = f([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$.

3. $f(x) = \ln x$, $f(]0, 1]) =]-\infty, 0]$.

Exemplo Considere-se uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, contínua, e tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0) > 0$.

Vamos ver que f tem máximo: como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, existe $R \geq 0$ tal que $f(x) < f(0)$, para $x > R$. Se $R = 0$, então $f(0)$ é máximo. Caso contrário, f tem máximo em $[0, R]$, pelo teorema de Weierstrass, dado por $M = f(c)$, com $c \in [0, R]$. Como $M > f(0) > f(x)$, para $x > R$, tem-se que $M = \max_{x\in[0,\infty[} f(x)$.

Exercício: Estude f quanto a mínimo e contradomínio (considere os casos $f(x) \neq 0$, para $x \in [0, \infty[$, e $f(x)$ tem zeros.)

Aula 17 – 22/10/2015

3 Cálculo Diferencial

Entramos agora num dos tópicos principais desta cadeira: o Cálculo Diferencial.

– usar derivadas como ferramentas no estudo de funções, em particular, cálculo de limites, representações gráficas, aproximação por polinómios

Geometricamente, queremos determinar o declive da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ (i.e., a velocidade instantânea em a, se f representar um deslocamento). Temos que a *razão incremental*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nos dá o declive da recta secante entre $(x, f(x))$ e $(a, f(a))$ (i.e., a velocidade média entre a e x). Claro que não podemos 'substituir' x por a... Ideia: substituir velocidade instantânea por velocidade média e tomar o limite.

Definição 3.1. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $a \in D$ (ponto de acumulação). Diz-se que f é *diferenciável em a* se existe em $\mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

A função derivada $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ está definida em todos os pontos $a \in D_{f'}$ onde f é diferenciável, o *domínio de diferenciabilidade*. A derivada de ordem n é dada por

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)', \quad f^{(0)}(x) = f(x),$$

nos pontos onde estiver definida.

Definem-se também as *derivadas à direita* e *à esquerda* [19] como

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad f'_e(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

É claro da definição de limite que:

Teorema 3.2. *f é diferenciável em a $\Leftrightarrow$ $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$ existem em $\mathbb{R}$ e*

$$f'_d(a) = f'_e(a) \in \mathbb{R}.$$

(NOTA: À partida, $f'_d(a)$ e $f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$ não são a mesma quantidade. Reparem que $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x) \Leftrightarrow$ a função derivada é contínua em a.)

Exemplos

1. $f(x) = mx + b$, então $f'(x) = m$, $x \in \mathbb{R}$.

[19] sempre que faça sentido, ou seja que a seja ponto de acumulação de $D \cap \{x > a\}$ para a^+, e de $D \cap \{x < a\}$ para a^-.

2. $f(x) = |x|$, então $f'(x) = 1$, $x > 0$ e $f'(x) = -1$, para $x < 0$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1, \quad f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

logo f não é diferenciável em 0, e $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus 0$. É contínua em 0.

3. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus 0$. É diferenciável no seu domínio, com $f'(x) = 0$, para todo $x \in D_f$.

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Como o limite não existe em $\mathbb{R}$, f não é diferenciável em 0 e $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus 0$. É contínua em 0.

5. $f(x) = \sqrt[2]{|x|}$ em $x = 0$. É contínua, não é diferenciável em 0.

Começámos a ver a noção de derivada e de função diferenciável:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Outra notação (Leibniz): $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Definição 3.3. Se f é diferenciável em a, a *recta tangente* ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é dada pela equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

De facto, a recta dada verifica

- $x = a$ então $y = f(a)$,
- tem declive $f'(a)$.

Aproximação pela recta tangente: estamos a aproximar $f'(a)$ por $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, e o erro nessa aproximação é dado por

$$E_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \;\to\; 0,\; x \to a.$$

Rescrevendo, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E_a(x)(x - a)$$

em que $E_a(x)(x - a) \to 0$ quando $x \to a$. Podemos escrever $f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a)$ quando $x \to a$. [20]

Exemplos: Os chamados 'limites notáveis' - que justificámos na aula 13 - são na realidade derivadas:

[20] Diz-se que $f \sim g$ quando $x \to a$ se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Leftrightarrow (\operatorname{sen})'(0) = 1.$

   A recta tangente a $f(x) = \operatorname{sen} x$ em 0 é dada por $y = f(0) + xf'(0) = x$, e temos $\operatorname{sen} x \sim x$, quando $x \to 0$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow (e^x)'(0) = 1.$

   A recta tangente a $f(x) = e^x$ em 0 é dada por $y = f(0) + xf'(0) = 1 + x$, e temos $e^x \sim 1 + x$, quando $x \to 0$.

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow (\ln)'(1) = 1.$

   A recta tangente a $f(x) = \ln x$ em 1 é dada por $y = f(1) + (x - 1)f'(1) = x - 1$, e temos $\ln x \sim x - 1$, quando $x \to 1$.

Antes de (re)vermos as derivadas das funções elementares, vamos relacionar a noção de diferenciabilidade com a de continuidade. (Intuitivamente: se $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) \neq 0$ então o limite da razão incremental não pode existir.)

Teorema 3.4. *Se f é diferenciável em a então é contínua em a.*

Demonstração. Uma vez que f é diferenciável em a, podemos usar a aproximação pela recta tangente. Temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E_a(x)(x - a)$$

em que $E_a(x)(x - a) \to 0$ quando $x \to a$. Tomando o limite em ambos os lados, temos então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

O contra-recíproco deste teorema é por vezes útil, e diz que

$$f \text{ não contínua em } a \Rightarrow f \text{ não diferenciável em } a.$$

Por ex., a função de Heaviside em $x = 0$:

$$H_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0,$$

$$H_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

(Notem que H é contínua à direita.)

Mas, claro, f contínua $\not\Rightarrow$ f diferenciável! Já vimos $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ são contínuas mas NÃO diferenciáveis em $x = 0$ e muitas outras.

Exemplo:

1. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Em ambos os casos, f é contínua em 0. No caso 1., não é diferenciável em 0, já que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, que sabemos não existir.

No caso 2., f é diferenciável em 0, com $f'(0) = 0$. Pode ver-se que f' muda de sinal em qualquer vizinhança de 0, e que aliás não existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ (ou seja, a função derivada f' não é contínua em 0).

Derivadas de funções elementares

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (porque $\lim_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \cos x$.)

2. $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (Reparem que f satisfaz a equação diferencial $f' = f$.)

4. $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercício: Prove as fórmulas dadas acima. (Repare que em cada caso a função derivada fica definida a partir do valor num ponto - $a = 0$ em 1., 2., 3., e $a = 1$ em 4. - onde é dada pela 'notabilidade' dos limites já estudados.

Destes exemplos saem muito outros usando regras de derivação vossas conhecidas.

Proposição 3.5. *Se f e g são diferenciáveis em a então $f \pm g$, cf ($c \in \mathbb{R}$), fg, $\frac{f}{g}$ (se $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de a) são diferenciáveis em a e*

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$, $\quad (cf)'(a) = cf'(a)$,

2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{f(a)^2}$, $\quad \left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.

Exemplos

1. Para $n \in \mathbb{N}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

   (pode ver-se por indução). Logo, para $n \in \mathbb{Z}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;\Rightarrow\; p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k.$

   Em particular, a derivada de ordem n é constante:

$$p^{(n)}(x) = n!a_n \;\text{ e }\; p^{(k)}(x) = 0,\; k \geq n+1, x \in \mathbb{R}.$$

3. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$

   $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$

   $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x.$

   $(\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x.$

4. $(\operatorname{sen}^2 x)' = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x).$

5. $\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)' = -\dfrac{1}{x \ln^2 x}$, para $x > 0, x \neq 1$.

Aula 18 – 23/10/2015

O seguinte resultado é crucial no calculo de derivadas:

Teorema 3.6 (Derivada da Função Composta)**.** *Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $b = g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Demonstração. Usando a aproximação pela recta tangente, temos

$$f(y) - f(b) = (y - b)f'(b) + (y - b)E_b(y)$$

em que $E_b(y) \to 0$, $y \to b$ representa o erro. Fazendo $y = g(x)$, $b = g(a)$, e dividindo por $x - a$, temos

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} f'(g(a)) + \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} E_{g(a)}(g(x)).$$

Como g é contínua em a (por ser diferenciável),

$$\lim_{x \to a} E_{g(a)}(g(x)) = \lim_{y \to b} E_b(y) = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} f'(g(a)) + \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} E_{g(a)}(g(x)) \\ &= g'(a)f'(g(a)) + \lim_{x \to a} g'(a)E_{g(a)}(g(x)) = g'(a)f'(g(a)). \end{aligned}$$

□

Notação de Leibniz: escrevendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$ então o teorema anterior pode ser escrito como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

e por esta razão é por vezes referido como *Regra da Cadeia*.

Exemplos:

1. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x.$
2. $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) a^x,\ a > 0, \quad (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$
3. $\left(e^{1+\operatorname{tg} x}\right)' = e^{1+\operatorname{tg} x}(1 + \operatorname{tg}^2 x), \quad \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad (\ln \cos x)' = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$
   Em geral:
   $$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}, \quad (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$
4. $\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)' = 2x\cos(x^2), \quad \left(\cos(\frac{1}{x^2})\right)' = \frac{2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$
   Em geral:
   $$(\operatorname{sen} u(x))' = u'(x) \cos u(x), \quad (\cos u(x))' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x).$$
5. $(\operatorname{sh} \ln x)' = \frac{1}{x} \operatorname{ch} \ln x, \quad \left(\operatorname{ch}(\operatorname{sen}^2 x)\right)' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{ch}(\operatorname{sen}^2 x).$
6. Se $f(y) = y^p$, então $(g(x)^p)' = pg(x)^{p-1}g'(x)$:
   $$\left(\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\right)' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x - 2 \operatorname{sen}^4 x \cos x.$$
   $$\left((e^{2x} + \operatorname{tg}(\cos x))^4\right)' = 4(e^{2x} + \operatorname{tg}(\cos x))^3(2e^{2x} - \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{tg}^2(\cos x)))$$
7. $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
8. $(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = x^x(\ln x + 1).$
   $((1 + x^2)^{\cos x})' = (e^{(\cos x)\ln(1+x^2)})' = (1 + x^2)^{\cos x}(-(\operatorname{sen} x)\ln(1 + x^2) + \dfrac{2x \cos x}{1 + x^2})$
   Em geral: potência exponencial
   $$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = g'(x)\ln(f(x))f(x)^{g(x)} + g(x)f'(x)f(x)^{g(x)-1}.$$
   (não é suposto saberem esta fórmula de cor!)

Já vimos que f injectiva e contínua num intervalo $I \Rightarrow f^{-1}$ contínua no intervalo $J = f(I)$. Vemos agora:

Teorema 3.7 (Derivada da Função Inversa)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ injectiva e contínua em I, e a no interior do intervalo I. Se f é diferenciável em a, com $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e*
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, para $y \in f(I)$, temos $x \to a$ se $y \to b$, já que f^{-1} é contínua em $b = f(a)$. Logo,
$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$
já que $f'(a) \neq 0$. □

NOTA: Se soubessemos à partida que f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$, então também saíria do Teo. da Derivada da Composta, reparando que $f^{-1}(f(x)) = x$, para qualquer $x \in D_f$, logo $(f^{-1)'}(f(a))f'(a) = 1$. O cálculo directo dado acima mostra a diferenciabilidade de f^{-1} em b.

Exemplos

1. $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln y$, $y > 0$. Então:
$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

2. $f(x) = x^2$, $x > 0$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y > 0$. Então:
$$\left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$
Em geral, $\left(\sqrt[p]{y}\right)' = \frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}$.

3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$, $y \in]-1,1[$. Então:
$$(\operatorname{arcsen})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

4. $f(x) = \cos x$, $x \in]0,\pi[$, $f^{-1}(y) = \arccos y$, $y \in]-1,1[$. Então:
$$(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

5. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$, $y \in \mathbb{R}$. Então:
$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

6. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{-1}(y) = \operatorname{argsh} y$, $y \in \mathbb{R}$. Então:
$$(\operatorname{argsh})'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
(notando que $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$.) Reparem que calculamos a derivada mesmo sem conhecer explicitamente $\operatorname{argsh} y$. Da mesma forma,
$$(\operatorname{argch})'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \ y > 1.$$

Agora podemos também calcular:

$(e^{\operatorname{arcsen} x})' = \dfrac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1,1[$, $\quad \left(\sqrt[4]{\ln x}\right)' = \frac{1}{4x}(\ln x)^{-\frac{3}{4}}$, $x > 1$

$\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $x > 0$, $\quad$ etc.

Aula 19 – 27/10/2015

Extremos

Uma das principais aplicações da derivada é ao estudo de funções, nomeadamente, à determinação e classificação de pontos de extremo.

Definição 3.8. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$, $c \in D_f$.

(i) f tem um *máximo local* em c se

$$f(x) \leq f(c) \text{ numa vizinhança de } c.$$

Este ponto diz-se um *máximo absoluto* se $f(c)$ for o valor máximo de f em D_f, ou seja

$$f(x) \leq f(c) \text{ para qualquer } x \in D_f.$$

(ii) f tem um *mínimo local* em c se

$$f(x) \geq f(c) \text{ numa vizinhança de } c.$$

Este ponto diz-se um *mínimo absoluto* se $f(c)$ for o valor mínimo de f em D_f, ou seja

$$f(x) \geq f(c) \text{ para qualquer } x \in D_f.$$

Em qualquer dos casos, $f(c)$ diz-se um *extremo* de f, e c um *ponto de extremo* (ou *extremante* ou *mazimizante* ou *minimizante*).

É claro que extremo absoluto $\Rightarrow$ extremo local.

Exemplos:

1. $f(x) = 1 - |x|$ tem máximo (local e) absoluto em $x = 0$, já que $f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 1$.
2. $f(x) = x^2 + 1$ tem mínimo (local e) absoluto em $x = 0$
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3 - x^2, & \text{se } x < -1 \vee x > 1. \end{cases}$

   – tem mínimo local em $x = 0$, não é absoluto já que $\lim_{x\to\pm\infty} = -\infty$ (logo f não é minorada - não tem mínimo absoluto, nem sequer ínfimo).

   – tem máximo (local e) absoluto em $x = \pm 1$.

   Extremos no intervalo $I = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$:

   – mínimo local em $x = 0$,

   – máximo absoluto em $x = \pm 1$,

   – mínimo absoluto (em I) em $x = \pm\sqrt{3}$.
4. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ em $D_f = [-1, 1]$ tem máximo (local e) absoluto em $x = 1$ e um mínimo (local e) absoluto em $x = -1$ (é estritamente crescente).

Geometricamente, é intuitivo que se f tem um extremo em c e f é diferenciável em c, então a tangente ao gráfico (que existe) será horizontal. A recta tangente é dada por

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Se , por ex., $f'(c) > 0$, então $y > f(c)$, para $x > c$ e $y < f(c)$, para $x < c$ (é claro que c não é ponto de extremo da recta!) Como f pode ser aproximada por y 'perto de' c, $f(c)$ também não será extremo de f.

Teorema 3.9. *Se f é diferenciável em c:*

$$c \text{ é ponto de extremo } \Rightarrow f'(c) = 0.$$

Demonstração. Vamos ver que se $f'(c) \neq 0$, então c não é ponto de extremo. Notem que $f(c)$ é extremo $\Leftrightarrow$ $f(x) - f(c)$ não muda de sinal numa vizinhança de c. Temos

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) + E_c(x)(x - c) = (x - c)\left(f'(c) + E_c(x)\right).$$

em que $E_c(x) \to 0$ quando $x \to c$. Se $f'(c) \neq 0$, então numa vizinhança (suficientemente pequena) de c, $f'(c) + E_c(x)$ tem o mesmo sinal que $f'(c)$, [21] logo temos que o sinal de $f(x) - f(c)$ é o mesmo de $f'(c)(x - c)$. Como $x - c$ muda de sinal em c, também $f(x) - f(c)$ mudará, e c não pode ser ponto de extremo.

(Alternativamente: se f é diferenciável em c então $f'_d(c) = f'_e(c)$. Se $f(c)$ for máximo local, então $f(x) - f(c) \leq 0$ numa vizinhança $x \in V_\delta(c)$. Logo:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \text{ se } x > c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ se } x < c.$$

Conclui-se que $f'_d(c) \leq 0$ e $f'_e(c) \geq 0$. Como $f'(c) = f'_d(c) = f'_e(c)$, temos $f'(c) = 0$. Para mínimo é análogo.) $\square$

Os pontos c tais que $f'(c) = 0$ chamam-se *pontos críticos* de f. Pode haver pontos críticos que não são extremantes, por exemplo $f(x) = x^3$, ou seja,

$$f'(c) = 0 \not\Rightarrow c \text{ é ponto de extremo.}$$

Tipicamente, para estudar os extremos de uma função,

1. Achar possíveis pontos de extremo ('candidatos'): satisfazem uma das seguintes condições
   (a) $f'(c) = 0$,
   (b) $f'(c)$ não existe,
   (c) Em $I = [a, b]$: $c = a$ ou $c = b$.
2. Classificar (reparem que a aproximação pela recta tangente dá-nos pouca informação em pontos críticos, são necessários outro critérios.)

[21] Basta garantir que $|E_c(x)| < |f'(c)|$, o que é verdade em algum $V_\delta(c)$ pela definição de limite.

Exemplo Seja $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, com $D_f = \mathbb{R}$.

– $f'(x) \neq 0$, para $x \neq 0$, e f não diferenciável em 0. Logo o único ponto de extremo local possível é $x = 0$.
– f tem mínimo absoluto em 0 já que $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x$.

<u>Teoremas Fundamentais</u>

Veremos agora alguns resultados fundamentais do Cálculo Diferencial, que são em particular muito úteis no estudo de funções:

–Teorema de Rolle

–Teorema de Lagrange

–Teorema de Cauchy e Regra de Cauchy.

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Sabemos do Teorema de Weierstrass que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$, e que estes se encontram em a ou b, ou pontos $f'(c) = 0$, ou pontos onde f não tem derivada. Se for diferenciável em $]a, b[$ e se eliminarmos a possibilidade de os dois extremos serem em a e b, temos

Teorema 3.10 (Rolle). *Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Sejam $M = \max_{[a,b]} f$ e $m = \min_{[a,b]} f$ que existem pelo Teo. Weierstrass. Se $M = m$, então f é constante e $f'(x) = 0, x \in]a, b[$. Caso contrário, como $f(a) = f(b)$, pelo menos um dos extremos será em $f(c)$, com $c \in]a, b[$. Como f é diferenciável, $f'(c) = 0$. □

Corolário 3.11. *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe um zero da derivada.*

Se eliminarmos a hipótese de f ser diferenciável, a conclusão do teorema pode não ser verdadeira: por exemplo $x^{2/3}$, $1 - |x|$ (têm extremos em pontos de não diferenciabilidade).

Exemplos

1. Se f é duas vezes diferenciável e tem 3 raizes, então f'' tem (pelo menos) um zero:

   Se $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$, com $r_1 < r_2 < r_3$, então do Teo. Rolle, $f'(s_1) = f'(s_2) = 0$ para alguns $s_1 \in]r_1, r_2[$ e $s_2 \in]r_2, r_3[$. Aplicando agora o Teo. Rolle a f', temos que f'' tem (pelo menos) um zero em $]s_1, s_2[$.

2. A equação $e^x = 3x$ tem exactamente 2 soluções:

   (É uma aplicação típica do Teorema de Rolle.) Vemos separadamente:

   (i) Teorema de Bolzano: tem pelo menos 2 soluções. (Exercício.)

   (ii) Teorema de Rolle: tem no máximo 2 soluções.

   Logo tem exactamente 2 soluções. Para ver (ii): seja $f(x) = e^x - 3x$, diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = e^x - 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ tem uma só solução. Segue-se do Teorema de Rolle que f tem no máximo dois zeros.

Geometricamente, o Teo. de Rolle diz que há um ponto $c \in]a, b[$ tal que a tangente é horizontal, ou seja *paralela à recta secante que passa por* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ (já que assumimos $f(a) = f(b)$). Se não exigirmos que $f(a) = f(b)$ então o declive dessa recta secante é dado por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 3.12 (Lagrange). *Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$. Existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e defina-se $h(x) = f(x) - mx$. Temos que h é diferenciável / contínua sempre que f o seja, com $h'(x) = f'(x) - m$. Por outro lado, temos

$$m(b - a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow f(a) - ma = f(b) - mb \Leftrightarrow h(a) = h(b).$$

O Teorema de Rolle garante assim que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Ou seja, existe, pelo menos, um ponto em $]a, b[$ onde a velocidade instantânea coincide com a velocidade média entre a e b.

O Teorema de Lagrange generaliza o Teorema de Rolle (é a 'versão oblíqua'): se $f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$.

Aula 20– 29/10/2015

Vimos o T. de Rolle e o T. de Lagrange: se f uma função diferenciável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Temos então, nas condições acima, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Se $f(a) = f(b)$ então $f'(c) = 0$ - T. de Rolle. Escrevendo $h = b - a$, o T. de Lagrange pode ser formulado da seguinte forma muito comum:

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)\,h, \quad \text{para } c = a + th, \ t \in]0, 1[$$

(ou seja c entre a e $a + h$). É frequentemente útil aplicar o T. de Lagrange com o ponto a fixo, e $b = x$ a variar.

Exemplos:

1. Provar que $e^x > 1 + x$, $x > 0$.

   Vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$

Como $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$ e $x > 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 + x.$$

(Também é verdade que $e^x > 1 + x$, para $x < 0$. Reparem que $y = x + 1$ é a recta tangente em $x = 0$.)

2. Provar que $x < \operatorname{tg} x$, $x \in]0, \pi/2[$.

   De novo, vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = \operatorname{tg} x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1$$

   já que $\cos^2 x < 1$ em $]0, \pi/2[$. Logo como $x > 0$, segue-se que $\operatorname{tg} x > x$.

Uma das principais consequências do T. Lagrange é permitir relacionar a monotonia de uma função diferenciável com o sinal da sua derivada:

Corolário 3.13. *Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$.*

(i) $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[\quad \Rightarrow$ *f é constante em $[a, b]$;*

(ii) $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[\quad \Rightarrow$ *f é estritamente crescente em $[a, b]$;*

(iii) $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[\quad \Rightarrow$ *f é estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Demonstração. Para quaisquer $x_1, x_2 \in]a, b[$ com $x_1 < x_2$ temos que existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Notando que $x_2 - x_1 > 0$, temos então

(i) $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \quad \Rightarrow$ f é constante em $[a, b]$;

(ii) $f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad \Rightarrow$ f é estritamente crescente em $[a, b]$;

(iii) $f'(c) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad \Rightarrow$ f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

□

NOTAS:

1. Em geral:

   - f é (estritamente) crescente em $I \Rightarrow f'(x) \geq 0$, $x \in I$ (por ex. $f(x) = x^3$)
   - f é (estritamente) decrescente em $I \Rightarrow f'(x) \leq 0$, $x \in I$. .

2. Se o domínio não for *um* intervalo, então o resultado pode falhar: por ex.

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f'(x) = 0,\ x \in D_f = \mathbb{R} \setminus 0,\ \text{e } f \text{ não é constante em } D_f.$$

Ou: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) < 0$ em D_f mas f não é decrescente no domínio.

3. Se $f'(x) = g'(x)$ em I então $f(x) = g(x) + c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ (já que $(f - g)'(x) = 0$ em I).

Para classificar pontos de extremo (em geral não é preciso f'' - mesmo que exista):

Corolário 3.14. *Seja f contínua num intervalo I e diferenciável em $I \setminus \{a\}$.*[22] *Se f' muda de sinal em a então a é ponto de extremo.*

Demonstração. Consideramos o caso:

$$f'(x) > 0, x \in]a, a + \epsilon[\Rightarrow f \text{ crescente em }]a, a + \epsilon[\Rightarrow f(x) \geq f(a^+)$$

$$f'(x) < 0, x \in]a - \epsilon, a[\Rightarrow f \text{ decrescente em }]a - \epsilon, a[\Rightarrow f(x) \geq f(a^-).$$

Como f é contínua em a, $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$, logo

$$f(x) \geq f(a),\ x \in V\varepsilon(a)$$

e a é ponto de mínimo. O outro caso é análogo. □

É precisamente o caso de $f(x) = |x|$, que tem um mínimo em $x = 0$ - ponto de não diferenciabilidade. Se f não for contínua em a não é necessariamente verdade: $f(x) = -x$, se $x < 0$, $f(x) = x + 1$, $x \geq 0$. Então f' muda de sinal em 0 mas $f(0) = 1$ não é mínimo local.

Uma outra consequência útil do T. Lagrange relaciona as derivadas laterais $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$, i.e., os limites laterais da razão incremental, com os limite laterais da função f' em a:

Corolário 3.15. *Seja f contínua num intervalo I e diferenciável em $I \setminus \{a\}$.*

(i) Se existe $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ então existe $f'_d(a)$ e $f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.

(ii) Se existe $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ então existe $f'_e(a)$ e $f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$.

(iii) Se existe $\lim_{x\to a} f'(x)$ então f é diferenciável em a e

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x),$$

ou seja, f' é contínua em a.

[22] Notem que não estamos a assumir que f não é diferenciável em a, só não é necessário que seja.

Demonstração. É claro que (*iii*) segue de (*i*) e (*ii*). Para ver (*i*) ((*ii*) vê-se de forma análoga), queremos mostrar que

$$f_d'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

Do Teorema de Lagrange em $[a, x]$ (f é contínua), existe $c_x \in]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Quando $x \to a^+$ também $c_x \to a^+$. Como $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ existe, o resultado segue tomando o limite na igualdade acima.

□

Notem que f pode ser diferenciável e não existir $\lim_{x \to a} f'(x)$, por exemplo $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$. Neste caso a função f' não é contínua. Diz-se que f é de *classe* $C^1(I)$ se f é diferenciável em I e f' é contínua em I. Mais geralmente, *f é de classe $C^n(I)$* se é n-vezes diferenciável em I e $f^{(n)}$ é contínua.

Exemplos: Monotonia e extremos

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8)$
2. $f(x) = e^{-|x|}$
3. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.
4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Concavidades:

Definição 3.16. Seja f diferenciável em I. Diz-se que

- f é *convexa* em I, ou tem *concavidade virada para cima* se para qualquer $a \in I$,

  $$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \text{ numa vizinhança de } a, x \neq a.$$

- f é *côncava* em I, ou tem *concavidade virada para baixo* se para qualquer $a \in I$,

  $$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), \text{ numa vizinhança de } a, x \neq a.$$

- f tem um *ponto de inflexão em $a \in I$* se f muda de concavidade em a.

Teorema 3.17. *Seja f uma função 2-vezes diferenciável em I. Então:*

(i) Se $f''(x) > 0, x \in I$, então f é tem a concavidade virada para cima em I;

(ii) Se $f''(x) < 0, x \in I$, então f é tem a concavidade virada para baixo em I;

(iii) Se $f''(x)$ muda de sinal em a então f tem ponto de inflexão em a.

Demonstração. Vamos ver (i). Queremos ver que $f(x) - f(a) > f'(a)(x-a)$. Consideramos primeiro $x > a$: do teorema de Lagrange em $[a, x]$ temos

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$$

para algum $c \in]a, x[$. Como $f'' > 0$ em $]a, x[$, temos que f' é crescente em $]a, x[$, logo $c > a \Rightarrow f'(c) > f'(a)$. Como $x - a > 0$, temos $f'(c)(x-a) > f'(a)(x-a)$.

Se $x < a$, procede-se da mesma forma: neste caso temos $c \in]x, a[$, logo $f'(c) < f'(a)$. Como $x - a < 0$, temos também $f'(c)(x-a) > f'(a)(x-a)$.

O caso (ii) é análogo, e o caso (iii) sai de (i) e (ii). □

Daqui também sai um resultado de classificação de pontos críticos, ie pontos em $f'(a) = 0$, que é útil quando o sinal de $f'(x)$ é difícil de analisar. Reparem que se $f'(a) = 0$ então se f tem concavidade para cima para x numa vizinhança de a, então temos $f(x) > f(a)$, ou seja $f(a)$ é mínimo local.

Proposição 3.18. *Se f é de classe C^2 e $f'(a) = 0$ então:*

- *se $f''(a) > 0$ então $f(x) > f(a)$ numa vizinhança de $a \Rightarrow a$ é ponto de mínimo.*
- *se $f''(a) < 0$ então $f(x) < f(a)$ numa vizinhança de $a \Rightarrow a$ é ponto de máximo.*

(Se $f''(a) = 0$ nada se pode concluir - teríamos de usar a terceira derivada, veremos mais tarde quando dermos o Polinómio de Taylor.)

Demonstração. Notamos que se f é de classe C^2, ou seja, f'' é contínua, e $f''(a) > 0$ então $f''(x) > 0$ numa vizinhança de a, e do resultado anterior f tem a concavidade para cima numa vizinhança de a, logo $f(x) > f(a)$ e $f(a)$ é mínimo. □

Exemplo: $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$, 0 é ponto crítico $f''(0) = 2 > 0$ logo é ponto de mínimo.

Aula 21– 30/10/2015

O Teorema seguinte tem uma interpretação geométrica menos evidente, mas será muito útil.

Teorema 3.19 (Cauchy)**.** *Sejam f e g funções diferenciáveis em $]a, b[$, contínuas em $[a, b]$, com $g'(x) \neq 0$ em $]a, b[$*[23]*. Existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração. Seja $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ e defina-se $h(x) = f(x) - mg(x)$. Temos $h(a) = h(b)$ e o resultado sai do T. Rolle.

□

[23] Em particular, sabemos do T. Rolle que $g(a) \neq g(b)$.

De novo, o Teorema de Cauchy generaliza o Teorema de Lagrange, fazendo $g(x) = x$. Uma das aplicações mais úteis na prática do Teorema de Cauchy é um resultado que nos permite alargar consideravelmente o universo dos limites que sabemos calcular (e das funções que sabemos estudar).

Teorema 3.20 (Regra de Cauchy ou de l'Hôpital)**.** *Seja I um intervalo, $a \in I$, e f e g funções diferenciáveis em $I \setminus a$, $g'(x) \neq 0$. Se*

$$\text{(i) } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \textit{ou} \qquad \text{(ii) } \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

e se existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (em $\overline{\mathbb{R}}$), então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Vamos ver apenas o caso (i) em que temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Podemos assumir que $a \in D_f \cap D_g$ com $f(a) = g(a) = 0$ (já que podemos sempre prolongar por continuidade a a).

Do T. de Cauchy, para qualquer $x \in I$, $x \neq a$, temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

para algum $c_x \in I$ entre a e x.[24] Quando $x \to a$ também $c_x \to a$, logo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

já que o limite do lado direito existe.

□

NOTAS:

– Podemos tomar $a \in \overline{\mathbb{R}}$, fazendo por exemplo, uma mudança de variável $x = \frac{1}{y}$, com $y \to 0$.

– A Regra de Cauchy *só se aplica directamente em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$*!

– A condição que o limite do lado direito exista é essencial: por exemplo, se $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$ temos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1} \qquad \text{não existe em } \overline{\mathbb{R}}$$

mas, por enquadramento,

$$\lim_{\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\to +\infty} 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sen} x} = 1$ (indeterminação $\frac{0}{0}$)

[24] ou seja, $c_x \in]a, x[$ ou $c_x \in]x, a[$, consoante $x > a$ ou $x < a$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{tg} 1/x}{\operatorname{arctg} 1/x} = \lim_{y\to 0^+} \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{arctg} y} = 1.$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos(1/x)}{\operatorname{sen} x} = 0$ (indeterminação $\frac{0}{0}$, mas Regra de Cauchy não aplicável directamente, limite $\dfrac{f'}{g'}$ não existe).

4. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$ (não é indeterminação.)

5. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ é indeterminação $\frac{0}{0}$. A aplicação directa da regra de Cauchy não resolve o problema neste caso já que conduziria a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \ldots$$

Escrevemos então na forma de indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

(Podíamos ter feito mudança de variável logo no início.)

Reparem que os 'limites notáveis' $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ são todos também casos particulares da Regra de Cauchy (mas foram usados para determinar as derivadas de $\operatorname{sen} x$, e^x e $\ln x$, que são usadas na R.C...)

A Regra de Cauchy permite-nos comparar 'infinitamente grandes':

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Notação: Em geral, escrevemos $f(x) << g(x)$, quando $x \to a$, *f é desprezável perante g*, se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Neste caso podemos escrever, para $p \in \mathbb{N}$, $a > 1$:

$$\ln x << x^p << a^x, \quad x \to +\infty.$$

Usando a definição de limite segundo Heine, fazendo $x_n = n \to +\infty$, concluímos que

$$\ln n << n^p << a^n$$

(escala de sucessões - notem que não sabemos para $n!$... (porquê?).

Embora a Regra de Cauchy só se aplique a indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, nalguns casos, outros tipos de indeterminações podem ser reduzidos a estes.

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. É indeterminação $0\cdot\infty$: escrevemos como quociente $\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ e aplicamos a Regra de Cauchy.
2. $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ (indeterminação $0\cdot\infty$).
3. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln(\operatorname{sen} x)$ (indeterminação $0\cdot\infty$).
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 0$ (indeterminação $\infty - \infty$).

Indeterminações de tipo potência: 0^0, ∞^0, 1^∞:

Transformam-se em indeterminações produto / quociente usando exponencial e logaritmo.

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ (indeterminação 0^0)
2. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0^{+\infty} = 0$ (não é indeterminação)
3. $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = 1$ (indeterminação ∞^0).

   Logo, fazendo $x_n = n \in \mathbb{N} \to +\infty$ e usando a definição de Heine:
   $$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$
   Podemos estudar o limite da raiz indice n de algumas sucessões usando este método.
4. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = e$ (indeterminação 1^∞).

   Logo tomando $x_n = 1/n \to 0$ temos
   $$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
5. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} = \sqrt{e}$ (indeterminação 1^∞).

Podemos aplicar a regra de Cauchy sucessivas vezes, por exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Notação: escrevemos $f(x) \sim g(x),\ x\to a$, $f(x)$ *é aproximadamente* $g(x)$, quando $x \to a$, se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Os limites acima escrevem-se:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2},\ x\to 0, \qquad \operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{6},\ x \to 0.$$

Reparem que no 1º exemplo, ao aplicar RC duas vezes, usamos a segunda derivada e no 2º exemplo, usamos a terceira derivada, e em ambos os casos, 0 é ponto crítico. Em geral, podemos usar segundas derivada para estudar o comportamento 'perto' de pontos críticos.

Aula 22 – 3/11/2015

Aula 23 – 5/11/2015

Veremos estudo completo de funções, usando ferramentas estudadas. Tipicamente para esboçar o gráfico:
– monotonia e extremos
– concavidades
– assintotas
Assíntotas:

- *Verticais*: o gráfico de f tem assimptota vertical $x = a$ se
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \text{e/ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$
- *Horizontais*: o gráfico de f tem assimptota horizontal $y = b$ à direita se
$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$
eà esquerda tomando o limite em $-\infty$.
- *Oblíquas:* o gráfico de f tem assimptota oblíqua $y = mx + b$ à direita se
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx \in \mathbb{R}$$
e tem assimptota obliqua à esquerda tomando os limites em $-\infty$. (Claro que as horizontais são um caso particular: $m = 0$.)

Exemplos:

1. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$
$y = \frac{\pi}{2}x - 1$ assimptota oblíqua à direita, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ assimptota oblíqua à esquerda.
2. $f(x) = xe^{1/x}$
$x = 0$ assimptota vertical (à direita), $y = x + 1$ assimptota oblíqua à direita e à esquerda.

Exemplos: Estudo completo - monotonia, extremos, concavidades, assimptotas, gráfico - de:

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = xe^{1/x}$
3. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$
4. (Ex. 3.3 25) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{x+1}\right), & \text{se } x \geq 0, \\ x^2e^x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$

Aula 24 – 6/11/2015

Revisões para o teste.

Aula 25 – 10/11/2015

4 Primitivação

Primitivar é reverter o processo de derivação: dada f queremos determinar F com $F' = f$:

$$F = P(f) \to f \to f' \to f'' \to ...$$

A primitiva de uma função, como veremos, será muito útil no cálculo de integrais e em particular de áreas.

Definição 4.1. $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se *primitivável* em $I \subset D$, I um intervalo, se existe $F : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

Escrevemos $F(x) = P(f)(x)$ ou $F(x) = \int f(x)dx$.

A primitiva NÃO é única: se $F = P(f)$ então $F + c = P(f)$, para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, já que $(F + c)' = F' = f$. Aliás sai do T. de Lagrange que, num intervalo I, todas as primitivas são desta forma:

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \forall x \in I \Leftrightarrow (F - G)'(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

A $P(f)$ chamamos *uma* primitiva, qualquer, de f e a $P(f) + c$ a *forma geral das primitivas* de f no intervalo I. Poderá ser dada uma condição inicial que determine a constante c, por exemplo da forma $F(x_0) = a$.

Exemplos

1. $P(1) = x$.

   A forma geral das primitivas (em $\mathbb{R}$) é $F(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ constante. Se quisermos a (única) primitiva F tal que $F(2) = 3$ então

   $$F(2) = 2 + c = 3 \Rightarrow c = 1$$

   logo $F(x) = x + 1$.

2. Determinar F tal que $F'(x) = 2x$ e $F(0) = 3$: $P(2x) = x^2$, logo $F(x) = x^2 + 3$.

3. Nem todas as funções são primitiváveis:

   $$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   Se fosse $F'(x) = H(x)$ então $F(x) = x + c_1$, $x > 0$ e $F(x) = c_2$, se $x < 0$, e F não seria diferenciável em 0 ($F'_d(0) = H(0^+) = 1$ e $F'_e(0) = H(0^-) = 0$). Veremos que todas as funções *contínuas* são primitiváveis.

Em geral, a menos que seja pedido, vamos determinar uma primitiva qualquer.

<u>Primitivas Imediatas</u>:

- $P(x^p) = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1}$, $p \neq -1$,

$$P(x) = \frac{x^2}{2}, \quad P(\sqrt{x}) = \frac{x^{3/2}}{3/2}, \quad P\left(\frac{1}{x^2}\right) = P(x^{-2}) = -\frac{1}{x}, \quad P\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} \ldots$$

  Notem que como o domínio de $1/x^2$ é uma união de intervalos $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, a forma geral das primitivas de $1/x^2$ é

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + c_1, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + c_2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x|$, $x \neq 0$ (note-se que $(\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$). De novo neste caso a a forma geral das primitivas é

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + c_1, & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- $P(e^x) = e^x, \quad P(a^x) = \frac{1}{\ln a}a^x.$

- $P(\operatorname{sen} x) = -\cos x, \quad P(\cos x) = \operatorname{sen} x, \quad P\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x, \quad P\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = -\operatorname{cotg} x.$

- $P\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x, \quad P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x.$

- $P(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x, \quad P(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x.$

Antes de vermos mais exemplos, notem que sai directamente das regras de derivação que

$$P(f+g) = P(f) + P(g), \quad P(cf) = cP(f), \ c \in \mathbb{R} \text{ (constante)}.$$

Exemplos

1. $P((\sqrt{x}+2)x) = P(x^{3/2}+2x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + x^2.$
2. $P(\dfrac{1}{x-2}) = \ln|x-2|.$
3. $P((x+1)^3) = \frac{1}{4}(x+1)^4.$
4. $P((1-x)^3) = -\frac{1}{4}(1-x)^4.$
5. $P(3e^x + e^{3x}) = 3e^x + \frac{1}{3}e^{3x}.$
6. $P(\operatorname{sen}(4x+1)) = -\frac{1}{4}\cos(4x+1).$
7. $P(\dfrac{1}{1+4x^2}) = \frac{1}{2}P(\dfrac{2}{1+(2x)^2}) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x).$

Primitivação Quase-Imediata (por Substituição - I):

Permite-nos primitivar funções da forma $f(u(x))u'(x)$.

Se $F = P(f)$, ou seja, se $F' = f$, sai da regra de derivação da função composta:

$$P\,(f(\,u(x)\,)u'(x)) = F(\,u(x)\,) = P(f)(u(x)),$$

porque

$$(F(\,u(x)\,))' = F'(\,u(x)\,)u'(x) = f(\,u(x)\,)u'(x).$$

Ou seja, é suficiente primitivar f, na variável u. Usando a notação 'emprestada' dos integrais, temos

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)du, \qquad \text{com } u = u(x).$$

Podemos escrever $du = u'(x)dx$.

Exemplos:

1. $P(xe^{x^2}) = \frac{1}{2}e^{x^2}$, $\quad P(\cos x\, e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}$, $\quad P(\dfrac{e^{1/x}}{x^2}) = -e^{1/x}$.

   Em geral:
   $$P(u'(x)e^{u(x)}) = e^{u(x)}.$$

2. $P\left(\dfrac{3x^2}{1+x^3}\right) = \ln|1+x^3|$, $\quad P\left(\dfrac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}\right) = \ln(2+\operatorname{sen} x)$, $\quad P(\tan x) = -\ln|\cos x|$.

   Em geral:
   $$P\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right) = \ln|u(x)|.$$

3. $P(x^2\sqrt{1+x^3}) = \frac{1}{3}P((x^3)'(1+x^3)^{1/2}) = \frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}$, $\quad P(x(1+x^2)^4) = \frac{1}{10}(1+x^2)^5$,

   $P(\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}) = \operatorname{arctg}^2 x$.

   Em geral:
   $$P(u'(x)u(x)^p) = \frac{1}{p+1}u(x)^{p+1},\ p \neq -1.$$

   Caso particular: $P(u'(x)u(x)) = \frac{1}{2}u(x)^2$.

4. $P(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, $\quad P(\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}(1/x)) = \cos(1/x)$.

   Em geral:
   $$P(u'(x)\cos(u(x)) = \operatorname{sen}(u(x)), \qquad P(u'(x)\operatorname{sen}(u(x)) = -\cos(u(x)).$$

5. $P(\dfrac{2x}{1+x^4}) = \operatorname{arctg}(x^2)$, $\quad P(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\ln^2 x}) = \operatorname{arctg}(\ln x)$, $\quad P(\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}) = \operatorname{arcsen}(e^x)$.

   Em geral:
   $$P(\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}) = \operatorname{arctg} u(x), \qquad P(\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}) = \operatorname{arcsen} u(x).$$

Estas são as primitivas básicas: veremos em seguida métodos de primitivação que terão como objectivo reduzir a primitivas imediatas e quase-imediatas.

Aula 26 – 12/11/2015

Primitivação por partes:

Da Regra de derivação do produto temos $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Primitivando dos dois lados chegamos a

$$u(x)v(x) \;=\; P(u'(x)v(x)) + P(u(x)v'(x)) \;\Leftrightarrow\; P(u'(x)v(x)) \;= u(x)v(x) \;-\; P(u(x)v'(x))$$

que podemos escrever

$$P(u'v) = uv - P(uv')$$

ou em notação com simbolo de integral:

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Este método é útil para primitivar produtos: escolher u' - que primitivamos, ou seja passa a u - e v que derivamos. Reparem que não resolve a primitiva, apenas transforma numa (que se quer) mais fácil - imediata ou quase imediata, ou que se resolve por outros métodos.

Exemplos

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$.
   fazer $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$
2. $\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$
   fazer $u'(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $v(x) = x^2$ e depois outra primitivação por partes.
3. $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2(xe^{x^2})\,dx$
   fazer $u'(x) = xe^{x^2}$ e $v(x) = x^2$.
   (OU $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\, e^{x^2}(2x)\,dx = \int ue^u\,du$ com $u = x^2$ e depois por partes...)
4. $\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$.
   fazer $u'(x) = x^2$, $v(x) = \ln x$

   Tipicamente, é frequentemente útil derivar $\ln x$, e também $\operatorname{arctg} x$.
5. $\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\ln x - \int x\,\dfrac{1}{x} = x\ln x - x$
   (fazendo $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$)
6. $\int \operatorname{arctg}(x)\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
7. $\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$

Um fenómeno comum que decorre da primitivação por partes envolvendo essencialmente (mas não só) funções trigonométricas, é obtermos uma equação para a primitiva / função que queremos determinar. Por exemplo,

1. Para determinar $\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$: por partes, duas vezes, escolhendo $u'(x) = e^x$ e $v(x) = \operatorname{sen} x$ (poderia ser ao contrário [25]):

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx \\ &= e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\,dx) \\ &= e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.\end{aligned}$$

   Ou seja, se $F(x) = \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$, temos

$$F(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - F(x) \;\Leftrightarrow\; F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) = \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx.$$

2. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{ch} x \cos x = \operatorname{ch} x \operatorname{sen} x - \operatorname{sh} x \cos x + \int \operatorname{sh} x(-\operatorname{sen} x)\,dx$
   Logo: $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sh} x\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \operatorname{sen} x - \operatorname{sh} x \cos x)$.

3. $\int \cos^2 x\,dx$ - usar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

4. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - \int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - \int(\operatorname{sh}^2 x + 1)\,dx$,
   Logo: $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - x)$

Aplicação: primitivação de polinómios de funções trigonométricas:

Fórmulas úteis:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Exemplos

1. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)'\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$
   OU
   $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)$.
   NOTA: reparem que $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$ e $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ diferem de uma constante...

2. $\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$.
   (OU por partes

[25] mas tinhamos de manter a escolha na segunda primitivação!

4. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
   Usamos $\cos(2x) = \cos^2 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ou seja

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

   (OU por partes

5. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1\, dx = \operatorname{tg} x - x$.

6. $\int \sec^2 x \operatorname{tg}^4 x\, dx = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.
   (Note-se $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.)

NOTA: Estas técnicas também resultam para produtos de funções hiperbólicas, usando $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

Nem sempre é possível usando primitivação por partes reduzir a primitivas imediatas ou quase imediatas, e é por isso conveniente alargar o universo de primimitivas que sabemos calcular.

Exemplo: $\int \frac{1}{x^2}\ln(1 + x)\, dx = -\frac{1}{x}\ln(1 + x) + \int \frac{1}{x(1 + x)}\, dx$

Para achar uma primitiva de $\dfrac{1}{x(1 + x)}$ usamos a tecnica de decomposiçao em fracçoes simples, que usaremos para primitivar *funçoes racionais*:

$$\frac{1}{x(1 + x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1 + x} = \frac{A(1 + x) + Bx}{x(1 + x)}$$

logo:

$$1 = A(1 + x) + Bx = (A + B)x + A, \forall x \;\Rightarrow\; A = 1, A + B = 0 \Leftrightarrow B = -1$$

e assim

$$\int \frac{1}{x(1 + x)}\, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\, dx = \ln|x| - \ln|1 + x|.$$

Aula 27 – 13/11/2015

<u>Primitivação de funções racionais:</u> $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$, com $p(x), q(x)$ polinómios

Imediatas:

$$\int \frac{1}{x - a}\, dx = \ln|x - a|, \qquad \int \frac{1}{(x - a)^p}\, dx = \frac{1}{p - 1}\frac{1}{(x - a)^{p-1}},\; p \neq 1$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}), \qquad \int \frac{x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(a^2 + x^2).$$

$$\int \frac{x}{a^2+(x-b)^2}\,dx = \int \frac{x-b+b}{a^2+(x-b)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+(x-b)^2) + \frac{b}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x-b}{a}).$$

Também sabemos primitivas mais 'complicadas', mas só desde que sejam de formas bastante específicas, por exemplo, $\frac{p'(x)}{p(x)}$ ou $\frac{p'(x)}{p(x)^k}$ ou $\frac{p'(x)}{1+p^2(x)}$... Para lidar com o caso geral, a ideia é decompor numa soma das primitivas imediatas vistas acima.

Método de Decomposição em Fracções Simples:

1. Garantir que grau $p(x) <$ grau $q(x)$: pode ser preciso dividir polinómios

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \operatorname{arctg} x.$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int x - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

2. Escrever $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como soma de funções racionais com primitiva imediata, dependendo das raizes / factores de $q(x)$

   - raiz simples - factor $(x-r)$: parcela $\dfrac{A}{x-r}$
   - raiz multipla - factor $(x-r)^m$: parcela $\dfrac{A_1}{x-r} + \dfrac{A_2}{(x-r)^2} + ... + \dfrac{A_m}{(x-r)^m}$
   - 2º grau sem raizes - factor $p^2+(x-q)^2$: parcelas $\dfrac{Ax+B}{p^2+(x-q)^2}$
   - 2º grau sem raizes multiplo - factor $(p^2+(x-q)^2)^m$: parcelas $\dfrac{A_1x+B_1}{p^2+(x-q)^2} + ... + \dfrac{A_mx+B_m}{(p^2+(x-q)^2)^m}$ (difícil de primitivar quando $B_k \neq 0$ - não veremos este caso - ver no entanto Ex. 17 Ficha 4)

3. Determinar as constantes e as primitivas imediatas resultantes.

Exemplos

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \ln|x-1| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3|$

   Decomposição:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\ &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

Logo,

$$x + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2),\ \forall x$$

e fazendo por ex. $x = 1, x = 2, x = 3$ temos $A = 1, B = -3, C = 2$.

3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$

4. $\displaystyle\int \frac{3}{(x+1)(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2}$

Decomposição:

$$\begin{aligned}\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\\ &= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}\end{aligned}$$

Logo,

$$3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1),\ \forall x,$$

e fazendo, por ex., $x = -1 \Rightarrow A = 1/3$, $x = 2 \Rightarrow C = 1$ e vendo o coeficiente de x^2 temos $0 = A + B \Rightarrow B = -1/3$.

5. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)$

Decomposição:

$$\frac{x+2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)}$$

Logo,

$$x + 2 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

e comparando coeficientes, vem $A = 1/2, C = 1$ e $A + B = 0 \Rightarrow B = -1/2$.

6. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x^2+1|$

Factorizar: $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Decomposição:

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Logo,

$$4x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

e, fazendo $x = 1 \Rightarrow A = 1$, $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $x = 0 \Rightarrow 0 = A - B - D \Rightarrow D = 0$, vendo o coeficiente de x^3, $0 = A + B + C \Rightarrow C = -2$.

Primitivação por substituição:

Já vimos
$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$
em que $g : I \to J$, I, J intervalos, se assume bijectiva (i.e., invertível). Escrevemos $g'(y) = \dfrac{dx}{dy}$.

Exemplos

1. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

   Fazendo $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$, temos $\frac{dx}{dy} = 2y$ e
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{y(1+y^2} \cdot 2y\,dy = \int \frac{2}{1+y^2)}\,dy = 2\,\mathrm{arctg}\,y = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}.$$

2. $\int \dfrac{1}{x^3}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$

   Fazendo $y = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y}$, temos $\frac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ e
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx &= \int y^3 \cos y \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int y\cos y \\ &= -y\,\mathrm{sen}\,y + \int \mathrm{sen}\,y\,dy = -y\,\mathrm{sen}\,y - \cos y = -\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

   (por partes - também se podia fazer directamente).

Aula 28– 17/11/2015

Primitivação por substituição: $\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$, $x = g(y)$, g invertível.

Exemplos

1. $\int \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\,dx$

   Fazendo $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$, temos $\frac{dx}{dy} = 2y$ e
$$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\,dx = \int \frac{y+3}{y+y^2}\,2y\,dy = 2\int \frac{y+3}{1+y}\,dy = 2y + 4\ln|y+1| = 2\sqrt{x} + 4\ln|\sqrt{x}+1|$$

   Em geral, funções racionais de $\sqrt[p]{x}$: $y = \sqrt[p]{x} \Leftrightarrow x = y^p$.

2. $\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

Fazendo $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, temos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \int \frac{2y^2}{y^2+2y+2}\,\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy$$

Notando que y^2+2y+2 não tem raizes, pode ser escrito como $(y+1)^2+1$, temos

$$\int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy = \int \frac{2(y+1)}{(y+1)^2+1}\,dy - \int \frac{2}{(y+1)^2+1}\,dy = \ln((y+1)^2+1) - 2\operatorname{arctg}(y+1)$$

e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \ln((e^x+1)^2+1) - 2\operatorname{arctg}(e^x+1).$$

Em geral, funções racionais de e^x: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.

3. $\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy$, com $y = \ln x$.

4. $\int \frac{1}{x\ln x(4+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{y(4+y^2)}\,dy$, com $y = \ln x$.

5. $\int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,dx$

Fazendo $y = \tan x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y$ (assumindo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$), temos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$ e

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = \int \frac{y}{(y+1)(1+y^2)}\,dy$$

Primitivando a função racional obtida (Exercício!) temos

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\tan x+1| + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x).$$

6. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

Fazendo $y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} y$ - seria dada - (assumindo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$), temos

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen} x| + \frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen} x|.$$

(Notem que $\cos(\operatorname{arcsen} y) = \sqrt{1-y^2}$.)

7. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2}\,dx$: fazer $y = \cos x$ (Exercício.)

Substituições standard para raizes (dadas):

- $\sqrt{a^2 - x^2}$: fazer $x = a \operatorname{sen} y$ ou $x = a \cos y$.
- $\sqrt{a^2 + x^2}$: fazer $x = a \tan y$ ou $x = a \operatorname{sh} y$.
- $\sqrt{a^2 - x^2}$: fazer $x = a \dfrac{1}{\cos^2 y}$ ou $x = a \operatorname{ch} y$.

Exemplos

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$

   Fazendo $x = \cos y$, $y \in]0, \pi[$, (ou $x = \operatorname{sen} y$) temos

   $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx = \int \tan^2 y\, dy = \int (1 + \tan^2 y) - 1\, dy = \tan y - y = \tan(\arccos x) - \arccos x$$

   Notem que de $1+\tan^2(\arccos x) = \dfrac{1}{\cos^2(\arccos x)} = \dfrac{1}{x^2}$, vem que $\tan(\operatorname{arccos} x) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

2. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 y\, dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$, fazendo $x = \operatorname{sen} y$.

3. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\, dx$, fazer $x = \tan y$.

Aula 29 – 19/11/2015

5 Cálculo Integral:

Vamos agora ver uma outra noção fundamental desta disciplina, a par da noção de derivada: a noção de *integral*. Motivação é geométrica:

generalizar (em particular, definir) a noção de *Área*.

Consideramos aqui o caso em que f está definida e é *limitada* em $[a,b]$, limitado.

- Se $f \geq 0$ em $[a,b]$:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ Área } (R),$$
em que $R = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$.
- Em geral:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ Área } (R^+) - \text{ Área } (R^-),$$
em que $R^+ = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$, $R^- = \{(x,y) : x \in [a,b], f(x) \leq y \leq 0\}$

Na verdade, não sabemos calcular áreas -a intuição que temos vem de conhecermos alguns exemplos simples:

Exemplos:

1. Rectângulos: $f(x) = c$, constante.
$$\int_a^b c dx = \text{ Área}(R) = c(b-a).$$
Tomando $v(x) = c$, velocidade constante, então $\int_{x_0}^{x_1} v(x)dx = c(x_1 - x_0)$ corresponde ao deslocamento entre x_0 e x_1 ou seja, notando que $d'(x) = v(x) \Leftrightarrow d(x) = P(v(x))$,
$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)dx = P(v)(x_1) - P(v)(x_0).$$
2. Triângulos $f(x) = x$, linear
$$\int_a^b x dx = \text{ Área}(R) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$
Também neste caso $\int_a^b x dx = P(x)(b) - P(x)(a)$.
3. Circulo: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
$$\text{Área } = 4\int_0^1 f(x)\,dx.$$
Aproximação por rectângulos, i.e., por funções constantes.

Vamos considerar sempre f *limitada em* $[a, b]$. Neste caso, teremos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

em que $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Duas questões:

1) Como, e para que funções e regiões, definir $\int_a^b f(x)\,dx$;
2) Como calcular integrais.

Exemplo: $A = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = ?$

Claro que $0 \leq A \leq 1$, mais geralmente num intervalo $[a, b]$,

$$a^2(b-a) \leq \int_a^b x^2\,dx \leq b^2(b-a)$$

$a^2 = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $b^2 = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Ideia: para cada $n \in \mathbb{N}$, dividir $I = [0, 1]$ em n subintervalos, de comprimento igual $1/n$, e fazer aproximações em cada subintervalo:

Para $n = 2$, fazemos $[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$ e obtemos

$$1/8 = 1/2(0 + (1/2)^2) \leq A \leq 1/2((1/2)^2 + 1) = 5/8$$

(média $3/8$);

Para $n = 3$, fazemos $[0, 1] = [0, 1/3] \cup [1/3, 2/3] \cup [2/3, 1]$ e obtemos

$$5/27 = 1/3(0 + (1/3)^2 + (2/3)^2) \leq A \leq 1/3((1/3)^2 + (2/3)^2 + 1) = 14/27;$$

(média $9,5/27$).

Em geral, para $n \in \mathbb{N}$:

$$[0, 1] = I_1 \cup \ldots \cup I_n, \qquad I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \qquad \Delta I_k = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

$$\sup_{x \in I_k} f(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2, \quad \inf_{x \in I_k} f(x) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2.$$

Teremos então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(f) \leq A \leq S_n(f)$$

em que

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \Delta I_k = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$s_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \Delta I_k = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Tendo em conta que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (por Indução - ver Ficha 2), então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1) = \frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{6n} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(f) = \lim \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1) = \lim \frac{n-1}{n}\frac{2n-1}{6n} = \frac{1}{3}.$$

Conjectura:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

(É compatível com $\int_0^1 x^2\,dx = P(x^2)(1) - P(x^2)(0)$.)

Será que depende da partição do intervalo? Será que as aproximações por somas superiores podem ser diferentes das inferiores?

Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 D(x)\,dx$ em que $D(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $D(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$.

Neste caso, tomando n subintervalos como acima:

$$\sup_{x\in I_k} D(x) = 1, \quad \inf_{x\in I_k} D(x) = 0,$$

logo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(D) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta I_k = 0, \qquad S_n(D) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta I_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Conjectura: $\int_0^1 D(x)\,dx$ NÃO está bem definido (usando o método acima).

Aula 30 – 20/11/2015

Começámos a ver a noção de integral. Vamos considerar sempre *f limitada em* $[a,b]$.

Definição 5.1 (Somas superiores e inferiores)**.** Seja f limitada em $[a,b]$ e

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$$

uma *partição* (ou decomposição) de $[a,b] = [a,x_1] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$, $I_k = [x_{k-1},x_k]$, $k = 1,...,n$ e $\Delta I_k = x_k - x_{k-1}$, comprimento do intervalo I_k. (Note-se que $\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k = b - a$.)

As *somas superiores e inferiores de f em relação a* $\mathcal{P}$ definem-se, respectivamente, como

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in I_k} f(x)\Delta I_k \qquad s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in I_k} f(x)\Delta I_k.$$

É claro que $s_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{P}}(f)$. As somas superiores são aproximações por excesso do valor - esperado, se existir - do integral, e as somas inferiores são aproximações por defeito.

Propriedades das somas superiores e inferiores

1. se $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, i.e., $\mathcal{P}'$ tem mais pontos que $\mathcal{P}$, então

$$s_{\mathcal{P}}(f) \leq s_{\mathcal{P}'}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f) \leq S_{\mathcal{P}}(f)$$

(as aproximações dadas por $\mathcal{P}'$ são 'melhores').

(Por exemplo, escrevendo $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,b]$, $\mathcal{P} = \{a,b\}$, $\mathcal{P}' = \{a,x_1,b\}$ então $S_{\mathcal{P}}(f) = M(b-a)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f$ e $S_{\mathcal{P}'}(f) = (\sup_{x\in[a,x_1]} f)(x_1-a) + (\sup_{x\in[x_1,b]} f)(b-x_1) \leq M(x_1 - a + b - x_1) = M(b-a) = S_{\mathcal{P}}(f)$.)

2. se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são duas partições quaisquer de $I = [a,b]$ então

$$s_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f)$$

(qualquer soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior).

(Basta tomar $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ e usar a prop. 1.: $s_{\mathcal{P}}(f) \leq s_{\mathcal{P}''}(f) \leq S_{\mathcal{P}''}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f)$.)

Em particular, o conjunto de *todas* as somas inferiores é majorado e o conjunto de *todas* as somas superiores é minorado.

Definição 5.2 (Integral superior e inferior)**.** Seja f limitada em $[a,b]$. Define-se

- *Integral Superior*:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_{\mathcal{P}}(f) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\}$$

- *Integral Inferior*:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_{\mathcal{P}}(f) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\}$$

- f é (*Riemann) integrável* em $[a,b]$ se $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e neste caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

O integral superior é a 'melhor aproximação por excesso', e o integral inferior é a 'melhor aproximação por defeito.'

Exemplos:

1. $f(x) = c$ (constante) então dada $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, partição de $[a,b] = [a,x_1] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$, e $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, temos $\sup_{x\in I_k} f(x) = \inf_{x\in I_k} f(x) = c$, logo

$$S_{\mathcal{P}}(f) = s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{K=1}^{n} c \cdot \Delta I_k = c\sum_{K=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a), \forall \mathcal{P}.$$

Conclui-se que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a)$ logo f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

2. Função de Dirichlet: $d(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $d(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$. Tomando $\mathcal{P}$ como acima, temos: $\sup_{x \in I_k} f(x) = 1$ e $\inf_{x \in I_k} f(x) = 0$ logo

$$s_{\mathcal{P}}(f) = 0, \forall \mathcal{P}, \qquad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{K=1}^{n} \Delta I_k = b - a, \forall \mathcal{P}.$$

Conclui-se que $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = b - a \neq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = 0$ logo f NÃO é integrável em $[a, b]$, para qualquer intervalo $[a, b]$.

(NOTA: d é descontínua em todos os pontos.)

Nos dois exemplos acima, as somas são independentes da partição $\mathcal{P}$ considerada. Em geral, não é verdade, mas para que f seja integrável, as somas superiores e inferiores têm de poder estar tão perto quanto se queira.

Proposição 5.3 (Critério de integrabilidade)**.** *Seja f limitada em $[a, b]$. Então*

(i) f é integrável em $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma *partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ tal que*

$$S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \epsilon.$$

(ii) f é integrável em $[a, b]$ com $\int_a^b f(x)\, dx = A$ $\Leftrightarrow$ para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma *partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ tal que*

$$A - \epsilon \leq s_{\mathcal{P}}(f) \leq A, \qquad A \leq S_{\mathcal{P}}(f) \leq A + \epsilon.$$

Demonstração. (i) Segue da definição de sup e inf: se $\beta = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{\mathcal{P}}\{S_{\mathcal{P}}(f)\}$, e $\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{\mathcal{P}}\{s_{\mathcal{P}}(f)\}$, $\mathcal{P}$ partição de $[a, b]$, então sabemos que $\alpha \leq \beta$, i.e., α é minorante de $\{S_{\mathcal{P}}(f)\}$ e β é majorante de $\{S_{\mathcal{P}}(f)\}$.

Se f é integrável, ou seja se $\alpha = \beta$ então, dado $\epsilon > 0$, existem $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ tais que

$$\alpha \leq S_{\mathcal{P}'}(f) < \alpha + \epsilon/2 \qquad \beta - \epsilon/2 < s_{\mathcal{P}''}(f) \leq \beta,$$

logo, tomando $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ temos $S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f) - s_{\mathcal{P}''}(f) < \epsilon$. Por outro lado, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\mathcal{P}$ com $S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \epsilon$, temos

$$0 \leq \beta - \alpha = \inf_{\mathcal{P}}\{S_{\mathcal{P}}(f)\} - \sup_{\mathcal{P}}\{s_{\mathcal{P}}(f)\} \leq S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer, temos $\alpha = \beta$.

(ii) Segue de (i) notando que $s_{\mathcal{P}}(f) \leq A \leq S_{\mathcal{P}}(f)$, para qualquer $\mathcal{P}$. □

A seguinte consequência é útil na prática, e justifica o método usado para 'calcular' $\int_0^1 x^2\, dx$ que já vimos:

Corolário 5.4. *Seja f limitada em $[a,b]$. Se existem partições $\mathcal{P}_n$ de $[a,b]$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f) - s_{\mathcal{P}_n}(f) = 0$$

então f é integrável e se $S_{\mathcal{P}_n}(f)$, $s_{\mathcal{P}_n}(f)$ convergem temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} s_{\mathcal{P}_n}(f).$$

Exemplos:

1. $f(x) = x$ em $[0,1]$:

   Seja $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, ..., 1\}$, uma partição de $I = [0,1]$, $\Delta I_k = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$. Então, $\sup_{x\in I_k} f(x) = \frac{k}{n}$, $\inf_{x\in I_k} f(x) = \frac{k-1}{n}$ e

   $$S_{\mathcal{P}_n}(f) - s_{\mathcal{P}_n}(f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)\Delta I_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

   Logo f é integrável em $[0,1]$. Como

   $$S_{\mathcal{P}_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\Delta I_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n},$$

   temos

   $$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f) = \frac{1}{2}.$$

2. $f(x) = x^2$ em $[0,1]$:

   $$S_{\mathcal{P}_n}(f) - s_{\mathcal{P}_n}(f) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = \frac{1}{n^3}n^2 = \frac{1}{n} \to 0$$

   uma vez que, da propriedade telescópica:

   $$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = 1 - 0 + 1/4 - 1 + ... + (n-1)^2 - (n-2)^2 + n^2 - (n-1)^2 = n^2 - 0 = n^2.$$

   Logo f é integrável em $[0,1]$ e de facto

   $$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f) = \frac{1}{3}.$$

3. $f(x) = x^3$ em $[0,1]$: $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$. - Exercício (como acima, usando que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$).

4. $f(x) = 0, x \in [0,2] \setminus \{1\}$, $f(1) = 10$. Então f é integrável em $[0,2]$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$:
   Consideramos a partição $[0,2] = [0, 1 - 1/n] \cup [1 - 1/n, 1 + 1/n] \cup [1 + 1/n, 2]$, $n \in \mathbb{N}$. Então, como em I_1 e I_3 temos $\inf f(x) = \sup f(x) = 0$,
   $$S_n(f) - s_n(f) = (10 - 0) \cdot \Delta[1 - 1/n, 1 + 1/n] = 20/n \to 0$$
   logo f é integrável em $[0,2]$ e
   $$s_n(f) = 0, \quad S_n(f) = 20/n \to 0 \quad \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = 0.$$

Em partcular, faendo como no no Exemplo 3 acima, vemos que:

O integral não depende de valores de f num conjunto finito: se f é integrável em $[a,b]$ e $g(x) = f(x)$, $x \neq c_1, ..., c_p$, então g é integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por linearidade, basta ver que se $h = f - g = 0$ em $[a,b] \setminus \{c_1, ..., c_p\}$ então h é integrável e $\int_a^b h(x)\,dx = 0$ - vê-se como no Exemplo 3 acima.

Classes de funções integráveis: Seja f limitada em $[a,b]$.

1. Se f é monótona em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.
   Prova: assumimos f é crescente, dividimos $[a,b]$ em n subintervalos, de comprimento $\Delta(I_k) = (b-a)/n$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Por monotonia, temos $\sup_{x\in I_k} f(x) = f(x_k)$ e $\inf_{x\in I_k} f(x) = f(x_{k-1})$. Então
   $$S_n(f) - s_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})\Delta I_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \to 0, \ n \to \infty.$$
2. Se f é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.
   (Prova (ideia): depende da noção de *continuidade uniforme*, que não vimos.)

NOTA: Se f não é limitada em $[a,b]$ então, por definição, não é integrável em $[a,b]$.

Temos uma 'nova' classe de funções:
$$f \text{ diferenciável} \Rightarrow f \text{ contínua} \Rightarrow f \text{ é integrável.}$$
As implicações inversas não são verdadeiras!

Exemplos:

1. $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \cos x$ etc. são integráveis em qualquer intervalo, já que são contínuas em $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ é integrável em qualquer $[a,b]$ tal que $0 \notin [a,b]$, i.e., a, b têm o mesmo sinal.

Propriedades do integral:

1. *Linearidade*: Sejam f, g integráveis em $[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$. Então $f \pm g$ e cf são integráveis em $[a, b]$ e
$$\int_a^b (f \pm g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx,$$
$$\int_a^b (cf)(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$
Sai de:
$$\sup_{x\in I_k}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in I_k} f(x) + \sup_{x\in I_k} g(x) \quad \Rightarrow \quad S_{\mathcal{P}}(f+g) \leq S_{\mathcal{P}}(f) + S_{\mathcal{P}}(g)$$
$$\inf_{x\in I_k}(f+g)(x) \geq \inf_{x\in I_k} f(x) + \inf_{x\in I_k} g(x) \quad \Rightarrow \quad s_{\mathcal{P}}(f+g) \geq s_{\mathcal{P}}(f) + s_{\mathcal{P}}(g),$$
para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$. Logo, uma vez que f, g são integráveis, dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ tal que
$$S_{\mathcal{P}}(f+g) - s_{\mathcal{P}}(f+g) \leq (S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f)) + (S_{\mathcal{P}}(g) - s_{\mathcal{P}}(g)) < \epsilon$$
o que mostra o resultado para $f+g$. Para cf, nota-se que se $c > 0$, então $\sup_{x\in I_k}(cf)(x) = c\sup_{x\in I_k} f(x)$, $\inf_{x\in I_k}(cf)(x) = c\inf_{x\in I_k} f(x)$, e se $c < 0$, $\sup_{x\in I_k}(cf)(x) = c\inf_{x\in I_k} f(x)$, $\inf_{x\in I_k}(cf)(x) = c\sup_{x\in I_k} f(x)$ (se $c = 0$, o resultado é óbvio), e procede-se da mesma forma.

2. *Monotonia*: Sejam f, g integráveis em $[a, b]$, $b > a$.

   (i) $f \geq 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.
   Neste caso $\sup_{I_k} f(x) \geq 0$ e $\inf_{I_k} f(x) \geq 0$ para qualquer intervalo $I_k \subset [a, b]$, logo todas as somas superiores e inferiores são ≥ 0 e $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Tomando $h = g - f$ e usando linearidade, temos:

   (ii) Se $f \leq g$ em $[a, b]$ então
   $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$
   Em particular:

   (iii) Se $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ então
   $$m(b-a) = \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx = M(b-a).$$

3. *Aditividade em relação ao intervalo de integração*:

   (i) se f é integrável em $[a, b]$ então é integrável em qualquer $[c, d] \subset [a, b]$.
   Dada partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ com $S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \epsilon$, toma-se $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap [c, d]$.

(ii) se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ então é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

Exemplos

1. $\int_0^1 x(2x+3)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx + 3\int_0^1 x\,dx = 2/3 + 3/2 = 13/9$

2. $\int_0^2 f(x)\,dx$ em que $f(x) = 3x^2$, se $x \leq 1$ e $f(x) = 2$ se $x > 1$ (descontinuidade em 1):

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 3.$$

Para calcular $\int_1^2 f(x)\,dx$ usamos que $f(x) = 2$ em $[1,2] \setminus \{1\}$ logo $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 2\,dx = 2(2-1) = 2$.

Procedendo como no último exemplo, vemos que o integral em $[a,b]$ não depende de $f(a)$ e $f(b)$ e, mais geralmente:

Integrabilidade de funções Seccionalmente Continuas:

Se f é limitada em $[a,b]$, contínua em $[a,b] \setminus \{c_1, ..., c_p\}$ (número finito), tal que existem limites laterais $f(c_1^\pm), ..., f(c_p^\pm)$ então f é integrável.

NOTA: Por vezes é útil considerar $\int_a^b f(x)\,dx$ com $a > b$, mesmo não tendo significado geométrico. Definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

É fácil verificar que a aditividade do integral em relação ao intervalo de integração se mantem, por ex.,

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^0 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx$$

e que neste caso $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, para qualquer $a \in D_f$. Por outro lado, a propriedade de Monotonia NÃO se mantém: se $f \geq 0$ entao por ex. $\int_1^0 f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx \leq 0$.

Podemos agora definir *Área*: se $f \geq 0$ em $[a,b]$, f integrável em $[a,b]$ e $R = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ então

$$\text{Área}(R) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definindo

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) > 0 \end{cases},$$

temos $f^+, f^- \geq 0$ e $f = f^+ - f^-$, e f^+, f^- integráveis, logo, por linearidade

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \text{Área}(R^+) - \text{Área}(R^-)$$

em que $R^+ = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f^+(x)\} = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ e $R^- = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f^-(x)\} = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq -f(x)\}$.

Exercicio: Notando que $|f| = f^+ + f^-$, mostrar o analogo da desigualdade triangular (i.e., $|a+b| \leq |a| + |b|$ - que precisa) para integrais:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Exemplos

1. $\int_{-2}^{2} |x|\, dx = \int_{-2}^{0} (-x)\, dx + \int_0^2 x\, dx = 2 + 2 = 4$.
2. $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$, em que $f(x) = 1, x \geq 0, f(x) = -1, x < 0$, então $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = 1 - 2 = -1$.
3. $\int_0^2 (-x)\, dx = -2$.

Aula 31 – 24/11/2015

Uma outra noção importante relacionada com a ideia de integral como generalização de soma é a seguinte: dada f integravel em $[a,b]$, define-se

$$\textit{Valor médio de } f \textit{ em } [a,b] := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemplos:

1. $f(x) = x$ entao $VM(f)_{[a,b]} = \dfrac{1}{b-a}(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{b+a}{2}$.
2. $f(x) = |x|$ em $[-2,2]$ entao $VM(f)_{[-2,2]} = 1$
3. $f(x) = 1, x \geq 0, f(x) = -1, x < 0$, entao

$$VM(f)_{[-a,a]} = 0, \forall a, \qquad VM(f)_{[-2,1]} = -1/3.$$

Valor médio de f em $[a,b] = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$. Reparem que se $\lambda = VM(f)_{[a,b]}$ então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lambda(b-a) = \int_a^b \lambda\, dx$$

coincide com o integral da função constante $= \lambda$. O seguinte teorema, embora bastante simples, será de grande importância no que se segue:

Teorema 5.5 (Teorema da Média - I). *Seja f integrável em $[a,b]$ com $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ e $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Então, existe $\lambda \in [m, M]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lambda(b-a).$$

(Ou seja: $m \leq$ valor médio de f em $[a, b] \leq M$.)

Demonstração. Temos por Monotonia,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

□

Se assumirmos no teorema anterior que f é contínua em $[a, b]$, então pelo T. de Weierstrass, tem máximo M e mínimo m em $[a, b]$. Por outro lado, do T. do Valor Intermédio, f assume todos os valores em $[m, M]$, ou seja, o valor médio $\lambda = f(c)$, para algum $c \in [a, b]$.

Corolário 5.6 (Teorema da Média - II)**.** *Seja f é contínua em $[a, b]$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ e $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Exemplos:

1. $f(x) = 1$, $x \geq 0$, $f(x) = -1$, $x < 0$, entao $M = 1$, $m = -1$, vimos que $VM(f)_{[-a,a]} = 0, \forall a$, e $VM(f)_{[-2,1]} = -1/3$, com $-1/3, 0 \in [-1, 1]$ mas $f \neq 0$ e $f \neq -1/3$ - f não é contínua.
2. $f(x) = |x|$ em $[-2, 2]$ então $M = 2$, $m = 0$, e $VM(f)_{[-2,2]} = 1 = f(1) \in [0, 2]$ - f é contínua.

Integral indefinido:

Vimos a definição de integral, assim como várias propriedades desejáveis, que ilustram a noção de área. Vamos agora ver a questão: como calcular integrais? Para isso, vamos considerar uma questão aparentemente mais difícil: calcular $\int_a^x f(t)\,dt$ com x qualquer (tal que f seja integrável em $[a, x]$...)

Definição 5.7. Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. O *integral indefinido de f com ponto inicial a* é a função

$$F_a : D_F \to \mathbb{R}, \qquad F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

em que $D_{F_a} = \{x \in D : f$ é integrável em $[a, x]$ ou $[x, a]\}$.

NOTA: O integral *indefinido* $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma *função*, o integral *definido* $\int_a^b f(t)\,dt$ é um *valor*.

Temos

- $F_b(x) - F_a(x) = \int_a^b f(t)\,dt$, é constante $\forall x \in D_{F_a} \cap D_{F_b}$;
- $F_a(x) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ é independente de a, $\forall x, x_0 \in D_{F_a}$.

Exemplos:

1. $F(x) = \int_0^x t\,dt = \dfrac{x^2}{2}$.

   (Reparem que se $x < 0$ então $\int_0^x t\,dt = -\int_x^0 t\,dt = -(-x^2/2)$.)

2. $F(x) = \int_0^x H(t)\,dt$ em que $H(t) = 1,\ t \geq 0,\ H(t) = 0,\ t < 0$ função de Heaviside, é

$$\int_0^x H(t)\,dt = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   Notem que F é contínua em $\mathbb{R}$ (mesmo que H não seja).

3. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}$.

   Função erro ('error function') $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(x)$

   Função probabilidade acumulada - distribuição normal $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

4. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}^+$.

5. $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \ln(t)\,dt$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como vimos no Exemplo 2, a função integral indefinido pode ser (é em geral) mais regular do que a função f. De facto:

Proposição 5.8 (Continuidade do integral indefinido)**.** *Seja f integrável em $[a,b]$ e*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ \ x \in [a,b].$$

Então F é contínua em $[a,b]$

Demonstração. Sai do T. da Média - I: seja $x_0 \in [a,b]$. Como f é integrável, é limitada, sejam $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$. Então

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \lambda_x (x - x_0)$$

em que $\lambda_x \in [m, M]$ é o valor médio de f em $[x_0, x]$. Temos $m(x - x_0) \leq \lambda_x (x - x_0) \leq M(x - x_0)$ e por enquadramento $\lim_{x \to x_0} \lambda_x (x - x_0) = 0$, logo

$$\lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = \lim_{x \to x_0} \lambda_x (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

□

O resultado anterior pode ser escrito na forma:

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt.$$

Por outro lado, assumindo agora que f é contínua e usando o T. da Média - II, temos

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c_x)(x - x_0)$$

para algum $c_x \in [x_0, x]$, ou $[x, x_0]$ (dependendo de $x > x_0$ ou $x < x_0$).

Teorema 5.9 (Teorema Fundamental do Cálculo-I)**.** *Seja f contínua em $[a, b]$ e F o seu integral indefinido. Então F é diferenciável em $x_0 \in [a, b]$ e*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demonstração. Como vimos temos $F(x)-F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c)(x-x_0)$ para algum $c \in [x_0, x]$, ou $[x, x_0]$ logo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0)$$

já que se $x \to x_0 \Rightarrow c_x \to x_0$ e f é contínua em x_0. □

NOTA: podemos supor apenas que f é contínua em x_0: nesse caso usamos T. Média I e nota-se que, por continuidade $\lambda_x \to f(x_0)$, quando $x \to x_0$.

O resultado anterior pode escrever-se na forma: se f é contínua

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Em particular: *qualquer função contínua é primitivável* e

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f, com $F(a) = 0$

.

Exemplos:

1. $\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = e^{-x^2}$

   Podemos estudar estas funções a partir da sua derivada: por ex. é estritamente crescente - logo invertível, já que é contínua - tem concavidade para cima se $x < 0$ e para baixo se $x > 0$.

2. $\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)' = \frac{1}{x}, x > 0.$

   Logo, $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x + K$, $0 = \ln 1 + K \Rightarrow K = 0$ (ou sai da regra de Barrow que é $= \ln x$).

Teorema 5.10 (Regra de Barrow - Teorema Fundamental do Cálculo-II)**.** *Seja f contínua em $[a, b]$ e $P(f)$ uma sua primitiva qualquer em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f(t)\,dt = P(f)(a) - P(f)(b).$$

Demonstração. Sabemos que o integral indefinido $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f, logo para algum $C \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P(f)(x) + C, \qquad \text{e} \int_a^b f(t)\,dt = F(b).$$

Como $F(a) = 0$, temos

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = P(f)(b) + C - P(f)(a) - C = P(f)(b) - P(f)(a).$$

□

Aula 32 – 26/11/2015

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC-I) : se f é contínua

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Regra de Barrow (TFC-II): se f é contínua

$$\int_a^b f(t)\,dt = P(f)(a) - P(f)(b).$$

ou seja, se F' é integrável

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Neste sentido, vemos que integração é 'inversa' de derivação.

NOTA: O TFC também sai da Regra de Barrow (i.e., são equivalentes): temos

$$\int_a^x f(t)\,dt = P(f)(x) - P(f)(a) \;\Rightarrow\; \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = (P(f)(x) - P(f)(a))' = f(x)$$

(notem que $P(f)(a)$ é constante).

Exemplos (TFC):

1. $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, t \neq 0$, $f(0) = 2$: f é integrável, já que é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lim_{t\to 0} f(t) = 1 \neq f(0)$ mas é limitada. Então,

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},\; x \neq 0, \quad F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} F'(x) = 1.$$

(OU: escrevendo $\tilde{f}(t) = f(t), t \neq 0$ e $\tilde{f}(0) = 1$, então $\tilde{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, como o integral não depende de $f(0)$, temos $F(x) = \int_0^x \tilde{f}(t)\,dt$, logo $F'(x) = \tilde{f}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.)

2. $\left(\int_x^{-1} \frac{e^t}{t}\, dt\right)' = \left(-\int_{-1}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt\right)' = -\frac{e^x}{x},\ x < 0.$

3. $\left(\int_2^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt\right)' = 2x\,\frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{2e^{x^2}}{x}$

   já que escrevendo $F(x) = \int_2^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$, queremos derivar $F(b(x))$ com $b(x) = x^2$, logo $(F(b(x)))' = b'(x)F'(b(x)) = b'(x)f(b(x))$.

4. $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$, $D_F = \mathbb{R}^+$, para derivar F escrevemos

$$F(x) = \int_x^{a} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_a^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt = -\int_a^{x} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_a^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$$

   logo

$$F'(x) = -\frac{e^x}{x} + \frac{2e^{x^2}}{x}.$$

5. $\left(\int_1^{x} \frac{x^2 e^t}{t}\, dt\right)' = \left(x^2 \int_1^{x} \frac{e^t}{t}\, dt\right)' = 2x \int_1^{x} \frac{e^t}{t}\, dt + x^2 \cdot \frac{e^x}{x}.$

Em geral, se $a(x)$, $b(x)$ são diferenciáveis e f é contínua, então

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt\right)' = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

Exemplos- Regra de Barrow:

Notação: escrevemos $\int_a^b f(t)\, dt = P(f)(b) - P(f)(a) = [P(f)]_a^b$.

1. $\int_a^b x^p\, dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_a^b = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}).$

2. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0$

   $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1,\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2.$

3. $\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx = \ln 3$

4. $\int_0^1 (e^{3x} + 1)\, dx = [\frac{1}{3}e^{3x} + x]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 + 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{e^3 + 2}{3}.$

5. $\int_0^4 (x + \sqrt{x})\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = 8 + 16/3.$

Integração por partes:

Quando queremos integrar uma função cuja primitiva é calculada por partes, podemos substituir os valores à medida que calculamos o integral: se u, v são de classe C^1 (i.e., se as suas derivadas são contínuas):

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx = [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - [\frac{x^2}{4}]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x = [x\operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4} - [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = [\operatorname{sen} x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\operatorname{sen}^2 x\,dx = 0 + \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\,dx = \pi - \int_0^\pi \cos^2 x\,dx$

   logo $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \pi/2.$

Integração por substituição:

Se a primitiva da função a integrar é calculada por substituição: por ex.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx = [2e^{\sqrt{x}}]_1^2 = 2e^{\sqrt{2}} - 2e.$$

Mas se fizessemos $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ para calcular a primitiva

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{y}e^y\,2y\,dy = \int 2e^y\,dy = 2e^y = 2e^{\sqrt{x}}$$

e, para calcular o integral, em vez de substituir x por 1 e 2, poderíamos substituir y por $\sqrt{1}$ e $\sqrt{2}$, ou seja,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2e^y\,dy = 2e^{\sqrt{2}} - 2e.$$

Em geral: f contínua, $g : I \to J$, I, J intervalos, bijectiva, de classe C^1, então, fazendo $x = g(y)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))g'(y)\,dy.$$

Ou seja, fazemos $x = a \Rightarrow y = g^{-1}(a)$, $x = b \Rightarrow y = g^{-1}(b)$ e já não precisamos de inverter a substituição (mudámos o intervalo onde a variável está)

Exemplos:

1. $\displaystyle\int_{1/e}^{1} \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2}\, dx$ fazendo $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$, temos $x = 1 \Rightarrow y = 0$, $x = 1/e \Rightarrow y = -1$, logo
$$\int_{1/e}^{1} \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{y}{e^y(y-1)^2}\, e^y\, dy = \int_{-1}^{0} \frac{y-1+1}{(y-1)^2}\, dy = \int_{-1}^{0} \frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2}\, dy$$
$$= \left[\ln|y-1| - \frac{1}{y-1}\right]_{-1}^{0} = 1 - \ln 2 - 1/2 = 1/2 - \ln 2.$$

2. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^3} e^{1/x}\, dx$, fazendo $y = 1/x \Leftrightarrow x = 1/y$, temos $x = 1/2 \Rightarrow y = 2$, $x = 1 \Rightarrow y = 1$, logo
$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^3} e^{1/x}\, dx = \int_{2}^{1} y^3 e^y \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int_{1}^{2} y e^y\, dy = [ye^y]_1^2 - \int_{1}^{2} e^y\, dy = 2e^2 - e - [e^y]_1^2 = e^2.$$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{1-y}{(1+y)(1+y^2)}\, dy = [\ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

4. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x + \sqrt{x})\, dx$

NOTA: Usando substituição $y = -x$, pode ver-se que:
$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\, dy = \int_{0}^{a} f(-y)\, dy$$
logo:
$$f \text{ é par } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx, \qquad f \text{ é ímpar } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Aula 33 – 27/11/2015

Cálculo de Áreas:

Já vimos: se $f \geq 0$ integrável e $R = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ então
$$\text{Área } (R) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$
Mais geralmente, se f, g são integráveis e $R = \{(x, y) : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\}$ então
$$\text{Área } (R) = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\, dx.$$
Assumindo que f, g são contínuas, podemos usar a Regra de Barrow, e somos capazes de determinar áreas de figuras bastante gerais.

IMPORTANTE: Área ≥ 0!

Exemplos:

1. Área da região limitada por $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$
   Intersecções: $x^2 - 2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
$$A = \int_{-2}^{2} 6 - x^2 - (x^2 - 2)\, dx = 2\int_0^2 8 - 2x^2\, dx = 4[4x - \frac{1}{3}x^3]_0^2 = 4(8 - \frac{8}{3}) = \frac{64}{3}.$$

2. Área da região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$
   Como no exemplo anterior... (trocamos os eixos)

3. Área da região limitada por $y = x - 1$, $y = -e^x$, $y = -2$:
   Intersecções: $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$, $-e^x = -2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.
$$A = \int_{-1}^{0} (x - 1 - (-2))\, dx + \int_0^{\ln 2} (-e^x - (-2))\, dx = [\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^0 + [-e^x + 2x]_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

4. Área da região limitada por $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1$, $y = 0$
$$A = \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

5. Área da região $\{(x, y) : 1 \le x \le e, 0 \le y \le \dfrac{1}{x(1 + \ln^2 x)}\}$
$$A = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}\, dx = [\operatorname{arctg}(\ln x)]_1^e = \frac{\pi}{4}.$$

6. Área da *elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Vamos ver o caso $a = 2$, $b = 1$, i.e., $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$: temos
$$A = 4\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$$
   Usando a substituição $x = 2\operatorname{sen} t, t \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsen}(x/2)$ e temos $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = \pi/2$, logo
$$A = 4\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\pi/2} (\cos(2t) + 1)\, dt = 2[\operatorname{sen}(2t)]_0^{\pi/2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$
   Em geral: $A = ab\pi$, para o círculo de raio R: $A = \pi R^2$.

Outras aplicações:

Comprimento de linhas: se f é de classe C^1, o comprimento do gráfico de f com $a \le x \le b$ é dado por
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Volume de sólidos de revolução: se $f \geq 0$ e V é o sólido dado por revolução da linha $y = f(x)$ em torno do eixo dos xx, $a \leq x \leq b$, então

$$vol(V) = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx$$

(integramos a área do circulo com raio $f(x)$, $a \leq x \leq b$)

E muitas mais... (CDI-II)

Integrais impróprios: quando a região de integração não é limitada, ainda podemos por vezes 'dar sentido' ao integral - em particular, uma região ilimitada pode ter área finita. Há 2 casos possíveis:

(i) f não é limitada em $]a, b[$: por ex. se f tem assimptota vertical em $x = a$, definimos

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

Assim, para $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-p+1}(1 - x^{-p+1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{se } p < 1, \\ +\infty, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, será também $+\infty$ - o integral é divergente.)

(ii) $]a, b[$ não é limitado: por ex. em $]a, +\infty[$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

Assim, para $p \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-p+1}(x^{-p+1} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ +\infty, & \text{se } p < 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, será também $+\infty$ - o integral é divergente.)

Os integrais impróprios finitos dizem-se *convergentes*, se for infinito ou não houver limite, dizem-se divergentes.

<u>Funções elementares definidas por integrais:</u>

Podemos usar integrais, mais precisamente, integrias indefinidos para *definir* as chamadas funções elementares (exponencial e logaritmo, trigonométricas).

1. *As funções logaritmo e exponencial:* Já vimos

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

com domínio $\mathbb{R}^+$. Temos das propriedades do integral:

- $L(1) = 0$, $L(x) > 0$, para $x > 1$, $L(x) < 0$ para $0 < x < 1$;
- L é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$, com $L'(x) = \dfrac{1}{x}$, logo L é estritamente crescente, logo invertível;
- $\dfrac{x-1}{x} \leq L(x) \leq x - 1$, logo $\lim_{x\to 1} \dfrac{L(x)}{x-1} = 1$;
- $L(xy) = L(x) + L(y)$, $L(x^p) = pL(x)$
  (fixando y, $(L(xy))' = y\,\frac{1}{xy} = L(x)$, logo $L(xy) = L(x) + K$, fazendo $x = 1$ sai $k = L(y)$)
- Como L é crescente, $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} L(x)$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e
  $$\lim_{x\to 0^+} L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(2^{-n}) = \lim_{n\to+\infty} -nL(2) = -\infty$$
  $$\lim_{x\to +\infty} L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(2^{n}) = \lim_{n\to+\infty} nL(2) = +\infty$$
  em particular, $L(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Pode definir-se o número e como $L^{-1}(1)$ ou seja tal que $L(x) = 1$.

Chamamos a L a função logaritmo de base e e escrevemos $L(x) = \ln(x)$.

2. Agora definimos
$$E(x) = L^{-1}(x), \qquad E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$
As propriedades da exponencial saem das do logaritmo:
   - $E(x)$ é estritamente crescente, $E(0) = 1$, $E(1) = e$, e da derivada da função inversa
   $$E'(x) = \frac{1}{L'(E(x))} = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x),$$
   - $\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$,
   - $x + 1 \leq E(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$, logo $\lim_{x\to 0} \dfrac{E(x)-1}{x} = 1$;
   - $E(x+y) = E(x)E(y),\ E(xy) = E(y)^x$ logo
   $$E(x) = E(1)^x = e^x.$$

3. *Funções trigonométricas*: definem-se a partir das suas inversas.
Tendo em conta que a área do sector circular com ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ é dada por $\frac{\theta}{2\pi}\pi = \theta/2$, e que esta área pode ser escrita como
$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int_{\cos\theta}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow \theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta + 2\int_{\cos\theta}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$$
temos que
$$A(x) = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_{x}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt \ \Rightarrow\ A(\cos\theta) = \theta$$
ou seja a função cos será a inversa da função A.

Aula 34 – 1/12/2015

Aproximação por polinómios: polinómio de Taylor.

Vimos que as chamadas funções elementares têm definições rigorosas usando integrais, que nos dão as suas propriedade principais, mas estas definições não são muito práticas no sentido de as *calcular* em pontos específicos. Vamos agora ver como podemos aproximar uma função por um polinómio - fácil de calcular.

Objectivo: aproximar funções por polinómios, perto de um ponto a dado. Já vimos:

- Recta tangente: *aproximação linear*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) := p_1(x),$$

Temos $p_1(a) = f(a), p_1'(a) = f'(a)$.

Se quisessemos uma *aproximação quadrática:*

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2$$

tal que $p_2(a) = f(a), p_2'(a) = f'(a), p_2''(a) = f''(a)$.

Exemplo: $f(x) = e^x$ em $a = 0$ então $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ logo com $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ temos

$$p_2(0) = a_0 = 1, \quad p_2'(0) = a_1 = 1, \quad p_2''(0) = 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

logo

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

será a aproximação procurada. Se quisessemos uma aproximação cubica: $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ temos de novo

$$p_3(0) = a_0 = 1, \quad p_3'(0) = a_1 = 1, \quad p_3''(0) = 2a_2 = 1 \quad p_3'''(0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$$

logo

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

(Veremos que de facto p_3 é uma melhor aproximação de f perto de 0 do que p_2.)

Em geral temos:

- Aproximação quadrática:

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Temos $p_2(a) = f(a), p_2'(a) = f'(a), p_2''(a) = f''(a)$.

- Aproximação cubica:

$$p_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Temos $p_3(a) = f(a)$, $p_3'(a) = f'(a)$, $p_3'''(a) = f'''(a)$.

Ideia: considerar derivadas de ordem superior e determinar um polinómio de grau n cujas derivadas em a coincidam com as de f até à ordem n.

Definição 5.11 (Derivada de ordem k)**.** Com $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$f^{(1)}(x) = f'(x), \qquad f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x).$$

Para $k = 0$, temos por definição, $f^{(0)} = f$. A função f diz-se k-vezes diferenciável se $f^{(k)}$ existe, e de classe C^k se $f^{(k)}$ é contínua. Se existirem as derivadas de todas as ordens, f diz-se *indefinidamente diferenciável*.

Exemplos:

1. $f(x) = e^x$ então $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
2. $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f^{(k)}(x) = \operatorname{sen}(x + k\frac{\pi}{2})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
3. $f(x) = (x-1)^3$ então $f'(x) = 3(x-1)^2$, $f''(x) = 3 \cdot 2(x-1)$, $f'''(x) = 6 = 3!, \forall x$, $f^{(k)}(x) = 0$, $k \geq 4$.
4. $f(x) = (x-a)^n$ então $f^{(k)}(x) = n(n-1)...(n-k+1)(x-a)^{n-k}$, se $k \leq n$ e $f^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \geq n+1$. Reparem que $f^{(n)}(x) = n!$, é constante e que $f^{(k)}(a) = 0$, $\forall k = 0, 1, ..., n-1$

Fixo $a \in D_f$, queremos agora encontrar um polinómio de grau n cujas derivadas em $x = a$ coincidam com as de f até à ordem n. Escrevendo

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n$$

temos

- $p_n(a) = a_0 = f(a) \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(a)$,
- $p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + ... + na_n(x-a)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad p_n'(a) = a_1 = f'(a)$,
- $p_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2(x-a)... + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad p_n''(a) = 2a_2 = f''(a)$,
- $p_n^{(k)}(x) = k!a_k + ... + n(n-1)...(n-k+1)(x-a)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad p_n^{(k)}(a) = k!a_k = f^{(k)}(a)$.

Conclui-se que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ k = 0, ..., n.$$

Definição 5.12 (Polinómio de Taylor)**.** Seja f n-vezes diferenciável em $a \in D_f$, o *polinómio de Taylor de ordem / grau n no ponto a* é dado por

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Proposição 5.13. *Seja f de classe C^n numa vizinhança de a e $p_{n-1,a}$ o polinómio de Taylor de ordem $n-1$ em a, $n \in \mathbb{N}$. Então o coeficiente n do polinómio de Taylor de ordem n é dado por:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n}.$$

(NOTA: para $n = 1$, é a definição de derivada.)

Demonstração. Como temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicamos a Regra de Cauchy n vezes para obter

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - p'_{n-1,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = ... = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - p^{(n-1)}_{n-1,a}(x)}{n(n-1)...1(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

já que $f^{(k)}(a) = p^{(k)}_{n-1,a}(a)$, para qualquer $k = 1, ..., n-1$, portanto temos sempre indeterminações $\frac{0}{0}$, e $p^{(n)}_{n-1,a}(x) = 0$. Como $f^{(n)}(x)$ é contínua, o limite à direita existe e é $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. □

Conclui-se do resultado anterior que

$$f(x) - p_{n,a}(x) << (x-a)^n$$

ou seja, $p_{n,a}(x)$ é uma aproximação de f quando $x \to a$ (por um infinitésimo) com ordem superior a $(x-a)^n$.

Teorema 5.14 (Fórmula de Taylor). *Seja f de classe C^n numa vizinhança de a e $p_{n,a}$ o seu polinómio de Taylor de ordem n em a. Então*

$$f(x) = p_{n,a}(x) + E_n(x)(x-a)^n, \quad \text{em que } E_n(x) \to 0,\ x \to a.$$

Demonstração. Seja $E_n(x) = \dfrac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$ tal que $f(x) = p_{n,a}(x) + E_n(x)(x-a)^n$. Como, $p_{n,a}(x) = p_{n-1,a}(x) + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, temos

$$\lim_{x\to a} E_n(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

□

Exemplos:

1. $f(x) = e^x$ então em $a = 0$:

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x$ então em $a = 0$ temos $f^{(2k)}(0) = 0$ e $f^{(2k+1)} = (-1)^k$ logo, se n é ímpar,

$$p_{n,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + (-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n!}$$

(se n é par temos $p_{n,0}(x) = p_{n-1,0}(x)$).

3. $f(x) = \cos x$ temos, para n par,

$$p_{n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} ... + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!}$$

(se n é ímpar temos $p_{n,0}(x) = p_{n-1,0}(x)$). Reparem que este polinómio pode obter-se derivando o polinómio de ordem $n + 1$ para $\operatorname{sen} x$.

4. $f(x) = \ln x$ em $a = 1$: temos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, ..., \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$$

(pode provar-se por indução), logo $f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$ e

$$p_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

NOTA: Polinómio de Taylor da derivada e da primitiva

Se $p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é o polinómio de Taylor de ordem n de f em a então

- $(p_{n,a})'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ é o polinómio de Taylor de ordem $n-1$ de f' em a;
- $\int p_{n,a}(x)\,dx = \int f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,dx = C + f(a)x + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ logo, notando que $f^{(k)}(x) = (P(f))^{(k+1)}(x)$ e tomando $C = P(f)(a) - af(a)$, obtemos o polinómio de Taylor de ordem $n+1$ de $P(f)$ em a.

A primeira aplicação que veremos é ao estudo de funções, nomeadamente, à *classificação de pontos críticos*: seja a um ponto crítico, i.e., $f'(a) = 0$. Já sabemos que se $f''(a) > 0$, (respectivamente, $f''(a) < 0$) temos um ponto de mínimo (respectivamente, de máximo).

Se $f''(a) = 0$ podemos usar o polinómio de Taylor de 3ª ordem, neste caso $p_{3,a}(x) = f(a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$, e temos

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3, \ x \to a.$$

Como $(x-a)^3$ muda de sinal em a, se $f'''(a) \neq 0$, a não é ponto de extremo ($f(x) - f(a)$ muda de sinal em a).

Se $f'''(a) = 0$, tomamos $n = 4$, e tiramos as mesmas conclusões que para $n = 2$: temos agora

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

e $(x-a)^4 > 0$, $x \neq a$, logo $f(x) - f(a)$ tem o mesmo sinal 'perto de' a, e temos um ponto de máximo local (se for < 0) ou mínimo local (se for > 0). Em geral temos:

Teorema 5.15 (Classificação de pontos críticos)**.** *Seja f $n+1$-vezes diferenciável em I, com*

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Então:
– n é ímpar: a não é ponto de extremo.
– n é par: se $f^{(n)}(a) > 0$, é ponto de mínimo, se $f^{(n)}(a) < 0$, é ponto de máximo.

Demonstração. Temos que $p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Notando que, para x suficientemente próximo de a, o erro não afecta o sinal de $f(x) - f(a)$, podemos considerar

$$f(x) - f(a) \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

e a conclusão segue usando os mesmos argumentos que acima. □

Exemplos

1. $f(x) = \ln x + e^{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{1-x}$ logo $f'(1) = 0$ é ponto crítico. Temos

   $$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + e^{1-x}, f''(1) = 0, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} - e^{1-x}, f'''(1) = 1 \neq 0$$

   logo não é ponto de extremo.

2. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$, $f'(x) = 1 - \cos x$, $f''(x) = \operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$.

   Pontos críticos: $f'(x) = 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Temos $f''(2k\pi) = 0$ e $f'''(2k\pi) = -1 \neq 0$, logo f não tem pontos de extremo.

   Exercício: Esboce o gráfico de f. (Note que $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$ - o gráfico está entre as duas rectas.)

3. $f(x) = 2\cos x + x^2$: 0 é ponto de mínimo local já que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ mas $f^{(4)}(0) = 2 > 0$.

Aula 35 – 3/12/2015

Propriedades do Polinómio de Taylor:

- *Único* polinómio de grau n tal que $p_{n,a}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$, $k = 0, ..., n$.
- Temos $f(x) - p_{n,a}(x) << (x-a)^n$, $x \to a$, ou seja,

  $$f(x) = p_{n,a}(x) + (x-a)^n E_n(x)$$

  em que $E_n(x) \to 0$, $x \to a$. Podemos escrever

  $$f(x) \sim p_{n,a}(x), \ x \to a$$

  e a aproximação 'melhora' quando n aumenta.

Exemplo: $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$, $F'(x) = e^{-x^2}$, $F''(x) = -2xe^{-x^2}$, $F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$, logo $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, $F''(0) = 0$, $F'''(0) = -2$ e

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \sim x - \frac{2}{3!}x^3, \ x \to 0.$$

NOTA: Nem sempre a aproximação nos dá informação: por ex. se $f(x) = e^{-1/x^2}$, com $f(0) = 0$, temos $f^{(k)}(0) = 0$, logo o polinómio de Taylor de qualquer ordem é nulo.

Estimativas para o erro:

Para cada a e cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$R_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$$

o *erro cometido ao aproximar f pelo polinómio de Taylor de ordem n em a.* Já vimos que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

ou seja $R_{n,a}(x) << (x-a)^n$. Em aplicações é por vezes útil ter estimativas mais precisas para o erro.

Teorema 5.16 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Seja f $n+1$-vezes diferenciável e $a \in I \subset D_f$, I intervalo. Então*

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

em que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum c_x entre a e x.

Demonstração. Rescrevendo, queremos ver que

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

para algum c_x entre a e x. Vemos por indução: – Para $n = 0$ é o T. Lagrange.

– Supondo que é verdadeira para $n-1$, para qualquer função f, provamos para n: usando o T. de Cauchy, temos que existe d_x entre a e x tal que

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f'(d_x) - p'_{n,a}(d_x)}{(n+1)(d_x - a)^n}.$$

Como p'_n é o polinómio de Taylor de ordem $n-1$ de f', podemos usar a hipótese de indução com f' e $p'_{n,a}$, no ponto d_x, para concluir que

$$\frac{1}{n+1}\frac{f'(d_x) - p'_{n,a}(d_x)}{(d_x - a)^n} = \frac{1}{n+1}\frac{(f')^{(n)}(c_x)}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!},$$

para algum c_x entre x e a. □

Exemplos:

1. $e^x = 1 + x + ... + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$ em que

   $$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

   para algum c entre 0 e x. Se $|x| \leq 1$ então $e^c \leq e < 3$ e o erro vem

   $$|R_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!}, \ -1 \leq x \leq 1.$$

   Se quisermos erro $< 10^{-3}$, tomamos n tal que $(n+1)! > 3 \cdot 10^3$, por ex., $n = 6$ $(7! = 5040)$, erro $< 10^{-4}$, tomamos $n = 7$. Em particular, para $x = 1$, temos

   $$e \sim 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}, \text{ com erro } < 10^-3.$$

2. Para aproximar $\sqrt{e}$: temos $x = 1/2$ e portanto $e^c < e^{1/2} < 2$, dado que $c \in]0, 1/2[$, logo

   $$R_n(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!\,2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!\,2^n}.$$

   Temos:

   $$\sqrt{e} \sim 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n!\,2^n}$$

   em que

   - $n = 1$: Erro $= |R_n(x)| < \dfrac{1}{4}$,

- $n = 2$: Erro $= |R_n(x)| < \frac{1}{24} < \frac{1}{25} = 0.04$,
- $n = 3$: Erro $= |R_n(x)| < \frac{1}{4!2^3} = \frac{1}{192} < \frac{1}{200} = 0.005$,
- $n = 4$: Erro $= |R_n(x)| < \frac{1}{5!2^4} = \frac{1}{1920} < \frac{1}{2000} = 0.0005$.

ou seja, por exemplo, com $n = 3$

$$\sqrt{e} \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}.$$

3. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$, em que, para algum c entre 0 e x,

$$\text{Erro } = |R_{2n-1}(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(c + n\pi)|}{(2n)!}|x|^{2n} < \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

NOTA: Há várias outras formulas para o erro, nomeadamente a chamada *fórmula integral*

$$f(x) - p_{n,a}(x) = R_n(x) = \int_x^a \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt,$$

que se prova por exemplo usando indução e integração por partes (Exercício - notar que para $n = 0$ é o TFC.)

Uma propriedade importante do polinómio de Taylor é a sua *unicidade* enquanto polinómio de grau n que aproxima f por um infinitésimo de ordem $(x - a)^n$ perto de a:

Proposição 5.17 (Unicidade do polinómio de Taylor). *Se $p(x) = a_0 + a_1(x - a) + ... + a_n(x - a)^n$ é tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0$$

então $p(x) = p_{n,a}(x)$ é o polinómio de Taylor.

Demonstração. Basta ver que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para qualquer $k = 0, 1, ..., n$, ou seja, definindo $h(x) = f(x) - p(x)$ então $h^{(k)}(a) = 0$.

Temos $h(a) = 0$, já que se $h(a) \neq 0$ então seria $\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = \pm\infty$. Logo este limite é uma indeterminação $\frac{0}{0}$, usando a Regra de Cauchy, temos

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{n(x-a)^{n-1}}$$

e portanto $h'(a) = 0$ usando o mesmo argumento. Repetindo o processo n vezes, chegamos a $h^{(k)}(a) = 0, k = 0, ..., n$. □

Esta propriedade permite-nos encontrar polinómios de Taylor de forma indirecta, sem calcular as derivadas de ordem k no ponto. Veremos melhor as técnicas seguintes quando generalizarmos para séries de Taylor.

Exemplos:

1. Mudanças de variável (polinomiais): sabendo que, com $a = 0$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

em que $\dfrac{R_n(x)}{x^n} = \dfrac{e^c}{n!} \to 0$, se $x \to 0$, fazendo $x = y^2 \to 0$, se $y \to 0$, temos

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2} + ... + \frac{y^{2n}}{n!} + R_n(y^2)$$

em que $\dfrac{R_n(y^2)}{y^{2n}} \to 0$, $y \to 0$, logo $p_{2n,0}(x) = 1 + y^2 + \dfrac{y^4}{2} + ... + \dfrac{y^{2n}}{n!}$ é *o* polinómio de Taylor de ordem $2n$ de e^{y^2}.

2. Sabendo que, com $a = 0$,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

temos

$$x \operatorname{sen} x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!} + xR_{2n+1}(x)$$

em que $\dfrac{xR_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} \to 0$, $y \to 0$, logo $p_{2n+2,0}(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ é o polinómio de Taylor de grau $2n+2$ para $x \operatorname{sen} x$.

3. Da fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica $1 + x + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ temos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{1-x} - (1 + x + ... + x^n)}{x^n} = \frac{x}{1-x} \to 0, \ x \to 0$$

logo $p_{n,0}(x) = 1 + x + ... + x^n$ é o polinómio de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Para $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)}$ temos o polinómio em $a = 0$,

$$p_{n,0}(x) = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n.$$

Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $a = 1$, temos $f(x) = \dfrac{1}{1 + (x-1)}$, e obtem-se o polinómio

$$p_{n,1}(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - ... + (-1)^n (x-1)^n.$$

Exercício: polinómio de Taylor de $\dfrac{1}{1+y^2}$ fazendo $x = -y^2$

4. Polinómio de Taylor da derivada e da primitiva:

Como $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ para achar o polinómio de Taylor de ordem n de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ em $a = 0$, basta derivar o polinómio, de ordem $n+1$, achado para $\dfrac{1}{1-x}$ e obtem-se

$$\frac{1}{(1-x)^2} \sim p_{n,0} = (1 + x + x^2 + ... + x^{n+1})' = 1 + 2x + ... + (n+1)x^n.$$

Como $f(x) = \ln(1+x)$ tem derivada $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, ou seja, $f(x) = P(\dfrac{1}{1+x})$, para achar o polinómio de Taylor de ordem n de $f(x)$ em $a = 0$, basta primitivar o polinómio, de ordem $n-1$, achado para $\dfrac{1}{1+x}$ e obtém-se

$$\ln(1+x) \sim p_{n,0} = P(1 - x + x^2 - ... + (-1)^{n-1}x^{n-1}) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

Como $p_{n,0}(0) = \ln(1) = 0$, vem $C = 0$.

5. Voltando a $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, temos $F(x) = P(e^{-x^2})$, como o polinómio de grau $2n$ de e^{-x^2} é

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

temos que o polinómio de Taylor de grau $2n+1$ de F é

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

O erro cometido nesta aproximação é

$$|R_{2n+3}(x)| = \left| \frac{F^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right|$$

6 Séries:

Queremos dar sentido a *somas com um nº infinito de parcelas*: dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, será que a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

pode ser finita? A resposta é SIM, pode ser finita, dependendo de a_n.

Paradoxo de Zenão (sec. IV a.c): um corredor vai percorrer 1km. Quando percorreu 0,5km, falta ainda 0,5km, percorre mais 0,25 km, falta ainda 0,25km, percorre mais 0,125 km, falta ainda 0,125 km. Conclusão: um corredor nunca chega à meta! Sabemos que sim, estamos a somar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

e, como veremos, esta soma com infintas parcelas tem valor total 1.

Outro exemplo: dizimas infinitas periódicas

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... + 3 \cdot 10^{-n} + ...$$

Como formalizar? Ideia: tomar somas finitas e tomar o limite.

Definição 6.1 (Série convergente)**.** Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos a *sucessão das somas parciais* (s_n) como

$$s_1 = a_1, \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

ou seja, para cada n, s_n é uma soma *finita*, das primeiras n parcelas,

$$s_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se *convergente* se s_n for uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$ e neste caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Caso contrário a série diz-se *divergente.* Ao valor $\lim_{n\to\infty} s_n$, se existir em $\mathbb{R}$, chamamos a *soma da série*.

Reparem que neste caso se

$$s = \lim s_n = \lim(a_1 + ... + a_n) \in \mathbb{R}$$

temos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \;\Rightarrow\; s - s_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \to 0,\; n \to \infty.$$

Chama-se a $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ o *resto de ordem n da série*, ou seja, o erro ao aproximar s por s_n (intuitivamente, para n grande, a soma finita s_n está arbitrariamente perto do valor da soma total - ou seja, o que falta somar tende para 0).

Determinar a *natureza* de uma série é analisar a sua convergência. Notem que identificamos muitas vezes uma série com a sua soma.

Exemplos:

1. $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ então
$$s_n = 1 + ... + 1 = n \to +\infty$$
logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ é divergente.

2. $a_n = (-1)^n$ então:
$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = s_2 - 1 = -1$$
ou seja, $s_n = -1$ se n é ímpar e $s_n = 0$ se n é par, logo s_n é divergente em $\mathbb{R}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

3. $a_n = n$ então
$$s_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
(vê-se por indução - soma dos termos de uma progressão aritmética), logo a série é divergente, já que $s_n \to +\infty$. Também podiamos ver que $s_n \geq n \to +\infty$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

   É um exemplo de série de Taylor, que veremos com mais detalhe no fim. De facto: do polinómio de Taylor
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$
em que para cada x, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, $n \to \infty$. Logo com $x = 1$,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - R_n$$
e fazendo $n \to \infty$ em ambos os membros temos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge e a sua soma é e.

Na realidade, as 3 primeiras séries que vimos acima não podiam convergir, já que não verificam:

<u>Condição necessária de convergência:</u>

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é convergente, então } a_n \to 0.$$

Demonstração. Se $s_n \to s \in \mathbb{R}$, também $s_{n+1} \to s \in \mathbb{R}$. Temos assim
$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \quad \text{e} \quad \lim(s_{n+1} - s_n) = 0,$$
logo $\lim a_n = 0$. □

Equivalentemente, temos uma condição suficiente de divergência:

$$\text{Se } a_n \text{ não tende para 0, então } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente .}$$

Aula 36 – 4/12/2015

Séries: vimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se existe em $\mathbb{R}$

$$s = \lim s_n = \lim(a_1 + ... + a_n) \in \mathbb{R}$$

a que se chama a soma da série. Vimos também: *condição necessária de convergência* $\Leftrightarrow$ *condição suficiente de divergência:*

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é convergente, então } a_n \to 0.$$

ou seja,

$$\text{Se } a_n \text{ não tende para 0, então } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente .}$$

No entanto, *a convergência da série* $\sum a_n$ *NÃO é equivalente a* $a_n \to 0$: podemos ter $a_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente, como se vê no exemplo seguinte:

Exemplo: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ então $a_n \to 0$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente. (Da mesma forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$ é divergente.)

Intuitivamente, para que a série convirja temos de ter $a_n \to 0$ 'suficentemente depressa'.

Séries geométricas: são series da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n, \quad R = \text{ razão.}$$

Recordando a formula para a soma dos termos da progressão geométrica $a_n = R^n$, $R \neq 1$, temos

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} R^k = \frac{1 - R^{n+1}}{1 - R}$$

e, como

$$\lim R^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < R < 1, \\ +\infty, & \text{se } R > 1, \\ \text{nao existe , se } R \leq -1, \end{cases}$$

conclui-se que a série geométrica converge unicamente para $-1 < R < 1$ (se $R = 1$ já vimos que diverge) e neste caso a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n = \frac{1}{1 - R}, \qquad \sum_{n=p}^{\infty} R^n = R^p \frac{1}{1 - R}.$$

Mais geralmente, se tivermos $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ com $\frac{a_{n+1}}{a_n} = R$, $n \geq p$, entao a série converge se $-1 < R < 1$ e a sua soma é

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p \frac{1}{1-R}.$$

Exemplos:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ série geométrica de razão $R = 1/2$, como $-1 < r < 1$, a série converge e a sua soma é
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = s = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2} = 1.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (0.1)^n$ série geométrica de razão $R = 0.1 = 10^{-1}$, como $-1 < r < 1$, a série converge e a sua soma é
$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.1)^n = s = 0.1 \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{9},$$
ou seja,
$$0.111(1) = 1/9, \quad 0.333(3) = 1/3, \quad 0.999(9) = 1.$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ série geométrica de razão $R = -1/2$, como $-1 < r < 1$, a série converge e a sua soma é
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = s = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}.$$

Linearidade:

Directamente da definição de série convergente e da linearidade do limite de sucessões vem que:

- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $c \in \mathbb{R}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é convergente e
$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ é convergente e
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ é divergente.

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{1-2/3} = \frac{5}{3},$

   já que a série geométrica de razão $\dfrac{2}{3}$ converge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 2^n}{4^n}$ é convergente - soma de duas séries geométricas convergentes com razões $R_1 = -1/4$ e $R_2 = 1/2$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 4^n}{2^n}$ é divergente - soma de uma série geometrica convergente com uma série geometrica divergente (ou termo geral não tende para 0).

Séries de Mengoli ou Telescópicas

Sao séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}).$$

Neste caso temos

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

(é a propriedade telescópica dos somatórios) logo

a série é convergente $\Leftrightarrow$ s_n é convergente $\Leftrightarrow$ $b_1 - b_{n+1}$ é convergente $\Leftrightarrow$ b_n é convergente

e a sua soma é

$$s = \lim(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_n.$$

Claro que se tivermos $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$ então

$$s_n = -b_1 + b_{n+1}, \qquad s = -b_1 + \lim b_n.$$

Mais geralmente, se tivermos uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+k}),$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, a série converge se b_n e convergente em $\mathbb{R}$ e

$$s_n = b_1 + .. + b_k - b_{n+1} - \ldots - b_{n+k}, \qquad s = b_1 + .. + b_k - k\lim b_n.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$: série de Mengoli da forma $\sum b_n - b_{n+1}$ em que $b_n = \frac{1}{n}$.

   Como $\lim b_n = 0$ existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 - \lim b_n = 1.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$: série de Mengoli da forma $\sum b_n - b_{n+1}$ em que $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

   Como $\lim b_n = \cos 0 = 1$ existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é convergente e a sua soma é
$$s = b_1 - \lim b_n = \cos\pi - 1 = -2.$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)$: Mengoli convergente, $s = -b_1 + \lim b_n = -1/2 + 1 = 1/2$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n) - \ln(n+1))$: série de Mengoli da forma $\sum b_n - b_{n+1}$ em que $b_n = \ln(n)$.

   Como $\lim b_n = +\infty$ nao existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é divergente. (Teriamos $s_n = b_1 - b_{n+1} = \ln 1 - \ln(n+1) \to -\infty$.)

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$: para ver que e de Mengoli, podemos escrever
$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} - \frac{A}{n+3} = \frac{An+3A-An-A}{(n+1)(n+3)}$$
   logo $A = 1/2$ e temos
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$
   série de Mengoli da forma $\sum b_n - b_{n+2}$ em que $b_n = \frac{1}{n+1}$.

   Como $\lim b_n = 0$ existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é convergente e a sua soma é
$$s = b_1 + b_2 - 2\lim b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}.$$

As classes de séries que vimos até agora são bastante características, no sentido em que sabemos calcular explicitamente (ou aproximadamente, no caso das de Taylor) s_n. Em geral tal não é possível, e veremos agora critérios indirectos para garantir convergência, ou provar divergência.

NOTA: É fácil ver que *a natureza de uma série não depende de um nº finito de valores* - embora a sua soma sim! - ou seja

se $a_n = a'_n$ para $n \neq n_1, ..., n_p$, então $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum a'_n$ converge.

Em particular, as primeiras p parcelas são irrelevantes para determinar a natureza da série.

Aula 37 – 10/12/2015

Critérios de convergência para séries de termos não negativos:

Vamos considerar agora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \geq 0$. Neste caso, a sucessão das somas parciais é crescente, já que $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$, e portanto é simples dar critério de convergência de s_n e portanto da série $\sum_{a_n}$:

$$\sum a_n,\ a_n \geq 0 \text{ é convergente} \Leftrightarrow s_n \text{ é majorada.}$$

Daqui sai um critério muito útil:

Critério de Comparação: Sejam $0 \leq a_n \leq b_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Então:

(i) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

(ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

Demonstração. Escrevendo

$$s_n = a_1 + ... + a_n, \qquad s'_n = b_1 + .. + b_n$$

temos $s_n \leq s'_n$, logo

(i) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente $\Leftrightarrow s'_n$ é majorada, então s_n é majorada $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente

(ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente $\Leftrightarrow s_n \to +\infty$, então $s'_n \to +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

□

NOTA: como a convergência de uma série não depende dos primeiros p termos, o critério anterior ainda é válido se tivermos $0 \leq a_n \leq b_n$, para $n > p$.

Exemplos:

1. $\sum \frac{1}{3^n + n}$ é convergente do critério de comparação, ja que

$$0 < \frac{1}{3^n + n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e a serie $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e convergente, por ser geometrica de razao $R = 1/3 \in]-1,1[$.

2. $\sum \frac{1 + (-1)^n}{2^n + 1}$ é convergente do critério de comparação, ja que

$$0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{2^n + 1} < \frac{2}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

e a serie $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ e convergente, por ser geometrica de razao $R = 1/2 \in]-1,1[$.

3. $\sum \frac{1 + \operatorname{sen} n}{2^n + n}$ converge por comparação com a serie $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. $\sum \dfrac{2^{2n}}{3^n - 1}$ diverge do critério de comparação, ja que

$$\frac{2^{2n}}{3^n - 1} > \frac{2^{2n}}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

e a serie $\sum \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ e divergente, por ser geometrica de razao $R = 4/3 > 1$.

(OU: $\lim \dfrac{2^{2n}}{3^n - 1} = +\infty \neq 0$...)

5. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge por comparação com a serie de Mengoli $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Critério de Comparação II - limite: Sejam $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, para $n \in \mathbb{N}$. Se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

(ou $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \infty$) então as series $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tem a mesma natureza.

Demonstração. Se for $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, entao, para $n > p$, temos por exemplo

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2 \Leftrightarrow \frac{b_n}{2} < a_n < 2b_n$$

logo, do criterio de comparaçao,

- se $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum 2b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente,
- se $\sum b_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n/2$ divergente $\Rightarrow \sum a_n$ divergente.

Se for $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \infty$, temos $\lim \dfrac{a_n}{Lb_n} = 1$ e para $L \neq 0$, $\sum Lb_n$ tem a mesma natureza que $\sum b_n$. □

Escrevemos $a_n \sim b_n$ se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Exemplos:

1. $\sum \dfrac{1}{3^n - n}$ é convergente, $\dfrac{1}{3^n - n} \sim \dfrac{1}{3^n}$.
2. $\sum \dfrac{2^n + 3}{3^n + 2}$ converge, $\dfrac{2^n + 3}{3^n + 2} \sim \dfrac{2^n}{3^n}$.
3. $\sum \dfrac{4^n - n}{3^n - n^2}$ diverge, $\dfrac{4^n - n}{3^n - n^2} \sim \dfrac{4^n}{3^n}$.

(Relembrar escala de sucessoes: $\ln(n) << n^p << a^n << n^n$, $p > 0$, $a > 1$.)

Começámos a ver critérios de convergência para séries $\sum a_n$ com $a_n \geq 0$. Vimos critério de comparação - para aplicar este critério precisamos de ter séries de referência, ou seja séries que saibamos à partida que convergem ou divergem. Já vimos:

- Geométricas: $\sum r^n$ converge $\Leftrightarrow -1 < r < 1$;
- Mengoli: $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge $\Leftrightarrow b_n$ é convergente (em $\mathbb{R}$).
- Dirichlet: $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$? vamos ver.

Exemplo: Série Harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

Vamos ver que esta série diverge. Reparem que $\dfrac{1}{n}$ = Área do rectângulo de altura $\dfrac{1}{n}$ e base $[n, n+1]$, com largura $\Delta[n, n+1] = 1$, e portanto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Delta[k, k+1] > \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln(n) - \ln(1) \to +\infty.$$

Logo $s_n \to +\infty$ e a série diverge.

Critério do Integral: Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, decrescente e positiva. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx < +\infty.$$

Demonstração. Temos que $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ [26] e

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n-1} b_k.$$

Como f é decrescente, e o comprimento $\Delta([k, k+1] = 1$,

$$f(k+1) \leq b_k = \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

Logo, do critério de comparação
– se $\sum f(k)$ converge também converge $\sum b_k$
– se $\sum f(k)$ diverge, também diverge $\sum f(k+1)$, e tambem diverge $\sum b_k$. □

Exemplos:

1. Séries de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Já vimos que se $\alpha = 1$ temos a série harmónica que diverge. Se $\alpha \neq 1$ também podemos aplicar o critério do integral: fazendo $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ temos $f \geq 0$ em $[1, +\infty[$ e f decrescente, logo

[26] NOTA: como $f \geq 0$, o integral indefinido é crescente, logo $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx$ existe sempre em $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx < +\infty.$$

Usando a Regra de Barrow temos

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge} & \text{se } \alpha \le 1. \end{cases}$$

(Se $\alpha \le 0$, $\lim \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, e a divergência da série segue imediatamente.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha(n)}$

Podemos agora usar o critério de comparação com séries de Dirichlet:

Exemplos:

1. $\sum \frac{n+1}{n^3+1}$ diverge por comparação com $\sum \frac{1}{n}$
2. $\sum \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}$ converge por comparação com $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum \frac{n}{(\sqrt{n}+1)(n+1)(\sqrt[4]{n}+1)}$ diverge por comparação com $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$

Os próximos critérios que veremos têm como base a comparação com séries geométricas: notem que se tivermos

$$a_n \sim r^n \text{ então } \sqrt[n]{a_n} \sim r.$$

Critério da raiz (ou de Cauchy): seja $a_n \ge 0$ e

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = r.$$

(i) se $0 \le r < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge,

(ii) se $r > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(Se $r = 1$, nada se conclui.)

Demonstração. Se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, então para algum $\epsilon > 0$ com $r + \epsilon < 1$, temos para $n > p$,

$$\sqrt[n]{a_n} < r + \epsilon < 1 \ \Rightarrow a_n < (r+\epsilon)^n,$$

e (i) sai do critério de comparação, já que $\sum (r+\epsilon)^n$ converge por ser $r + \epsilon < 1$.

Para (*ii*), se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r > 1$ então tomando $r - \epsilon > 1$, $a_n > (r-\epsilon)^n$, $n > p$, e $\lim a_n = +\infty$ logo a série diverge. ☐

Por outro lado, sabemos que

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(e o limite à direira existir). Logo:

Critério de d'Alembert (ou da razão): seja $a_n \geq 0$ e

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

(i) se $0 \leq r < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge,

(ii) se $r > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Se $r = 1$, nada se conclui: por exemplo para as séries de Dirichlet, temos $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \forall \alpha$. Reparem que se $r > 1$, a divergencia da serie segue-se de neste caso $\lim a_n = +\infty$.

Aula 38 – 11/12/2015

Exemplos:

1. $\sum \frac{n}{2^n}$ converge: critério de d'Alembert

   (Em geral: $\sum \frac{n^p}{a^n}$ converge.)

   E também: $\sum \frac{n+4}{2^n+5}$ mesma natureza, usando comparação.

2. $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge: critério de d'Alembert.

3. $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge: critério de d'Alembert.

4. $\sum \frac{n^2+2^n}{2^n+n!}$ converge: criterio de comparaçao, mesma natureza que $\sum \frac{2^n}{n!}$ - critério de d'Alembert.

   OU critério de d'Alembert directo a $\frac{n^2+2^n}{2^n+n!}$.

5. $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ converge: critério da raiz.

6. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge: critério da raiz.

7. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge: critério da raiz.

8. $\sum \frac{1}{((-1)^n+3)^n}$ converge, mas Critério da raiz não se aplica directamente.

Vimos critérios de convergência para séries

$$\sum a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Se tivermos $a_n \leq 0$, então

$$\sum a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum -a_n \text{ converge}$$

e os critérios aplicam-se a $\sum -a_n$. Por exemplo,

$$\sum \frac{1-n}{n^2} = -\sum \frac{n-1}{n^2}$$

e a série à direita diverge - comparação com série harmónica. Se os termos a_n não tiverem sinal fixo, é necessário encontrar outras formas...

Séries de termos sem sinal fixo

Por exemplo,

$$\sum (-1)^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum \frac{\cos n}{n!}.$$

Já vimos $\sum (-1)^n$ - divergente, porque $(-1)^n$ não tende para 0, e $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ - convergente porque é série geométrica de razão $R = -1/2$.

As 3 primeiras series sao *alternadas*: verificam $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a_n e a_{n+1} tem sinais diferentes. Estas series podem sempre escrever-se numa das formas

$$\sum (-1)^n b_n, \qquad \sum (-1)^{n+1} b_n$$

em que $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em geral: ideia é considerar a parte positiva e negativa de a_n

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{se } a_n < 0, \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n \leq 0, \\ 0, & \text{se } a_n > 0, \end{cases}$$

(por ex. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, então $a_n^+ = 1/n^2$, n par, $a_n^+ = 0$, n ímpar, e $a_n^- = 1/n^2$, n ímpar, $a_n^- = 0$, n par). Temos $a_n^\pm \geq 0$ e

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Proposição 6.2. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demonstração. Temos $a_n^\pm \leq |a_n|$, logo $\sum |a_n|$ é convergente $\Rightarrow \sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ são convergentes e neste caso

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - a_n^-$$

é convergente por ser soma de duas séries convergentes. Por outro lado, $|s_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$, $\forall n$, logo $|s| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. □

Definição 6.3 (Convergência absoluta e convergência simples)**.** A série $\sum a_n$ diz-se:

- *absolutamente convergente* se $\sum |a_n|$ é convergente ($\Rightarrow \sum a_n$ converge)
- *simplesmente convergente* se $\sum |a_n|$ é divergente e $\sum a_n$ é convergente.

Claro que se $a_n \geq 0$, $n > p$, então

$$\sum a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ converge}$$

(porque $|a_n| = a_n$, $n > p$), ou seja, quando o sinal de a_n é fixo, para $n > p$, temos apenas um tipo de convergência (absoluta).

Exemplos:

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

   Série dos módulos: $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \dfrac{1}{n^2}$ é convergente - da forma $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 2 > 1$ - logo a série é absolutamente convergente.

2. $\sum \dfrac{\cos n}{n!}$

   Série dos módulos: $\sum \left|\dfrac{\cos n}{n!}\right| = \sum \dfrac{|\cos n|}{n!}$ é convergente - ja que $\dfrac{|\cos n|}{n!} < \dfrac{1}{n!}$ e $\sum \dfrac{1}{n!}$ é convergente (d'Alembert por ex.) logo a série é absolutamente convergente.

3. $\sum r^n$:

   Série dos módulos: $\sum |r|^n$. Logo, a série geométrica $\sum r^n$ é

   - absolutamente convergente se $|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$;
   - divergente se $|r| \geq 1 \Leftrightarrow r \leq -1 \vee r \geq 1$.

4. $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ - série harmónica alternada.

   Série dos módulos: $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ é divergente - é a série harmónica- logo a série nao é absolutamente convergente.

   Mas pode ainda ser convergente! Só concluimos que a convergencia neste caso sera simples.

Veremos agora um critério que permite mostrar convergência directamente, sem recorrer à série dos módulos.

Proposição 6.4 (Critério de Leibniz para séries alternadas)**.** *Se a_n é decrescente e $a_n \to 0$ então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ \textit{é convergente.}}$$

Demonstração. Temos $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sendo s_n a sucessao das somas parciais:
– $s_1 = a_1 > 0$,
– $s_2 = a_1 - a_2$
– $s_3 = a_1 - a_2 + a_3 \leq a_1 = s_1$, porque $-a_2 + a_3 < 0$,
– $s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 > s_2$, porque $a_3 - a_4 > 0$.

Em geral: s_{2n} é crescente, s_{2n-1} é decrescente, e limitadas, logo convergentes. Como $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0$, conclui-se que $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ e segue-se que s_n e convergente, ou seja, a serie alternada converge. □

Exemplos:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$- série harmónica alternada é convergente: com $a_n = \frac{1}{n}$ temos $a_n \to 0$ e a_n decrescente, aplica-se critério de Leibniz.

   Para classificar o tipo de convergencia: série dos modulos, que e divergente, logo a convergencia é simples.

   Em geral:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge absolutamente,} & \text{se } \alpha > 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge simplesmente,} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ diverge,} & \text{se } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ converge simplesmente.

NOTA: As séries simplesmente convergentes tem propriedades inesperadas, e 'indesejaveis': a soma da série depende da ordem! Por exemplo, para a série harmonica alternada teriamos

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \ldots$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \ldots$$

'somando termo a termo',

$$s + \frac{s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{8} \ldots$$

obtem-se uma reordenaçao da serie harmonica alternada com soma $\frac{3}{2}s \neq s$.

Aula 39 – 15/12/2015

Séries de potências: Vamos considerar séries da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

- generalização de polinómios, mas não estão em geral, definidas em $\mathbb{R}$.

Exemplo:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ – série geométrica de razão $R = x$, logo:

   - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente se $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
   - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x| \geq 1 \Leftarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

   Intervalo de convergência: $]-1, 1[$. Calculando a soma:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \; x \in]-1, 1[.$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$ – série geométrica de razão $R = x-2$, logo:

   - $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$ converge absolutamente se $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
   - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x-2| \geq 1 \Leftarrow x \leq 1 \vee x \geq 3$.

   Intervalo de convergência: $]1, 3[$. Calculando a soma:

   $$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}, \; x \in]1, 3[.$$

Definição 6.5 (Série de potências)**.** Uma *série de potências centrada em a* é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

em que $x \in D = \{x \in \mathbb{R} : \text{ a série } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ converge}\}$. A D chama-se o *domínio de convergência*.

Vamos ver que o domínio de convergência de uma série de potências como acima é sempre um *intervalo centrado em a*. É claro que a série converge sempre em $x = a$ (soma $= a_0$), e do critério de comparação, que se há convergência absoluta em em x tal que $x - a = x_0$ então também há convergência absoluta em y com $|y-a| < |x_0|$.

Teorema 6.6. *Existe $R \geq 0$ tal que a série $\sum a_n(x-a)^n$:*

- *converge absolutamente se $|x-a| < R$,*

- *diverge se* $|x-a| > R$

e R é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

se estes limites existirem (em $\overline{\mathbb{R}^+}$*).*

Demonstração. Fazemos $a = 0$ - o caso geral é uma translação deste. Assumindo que $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (que existe), aplicando o Critério de d'Alembert, para cada x, à série dos módulos

$$\sum |a_n||x|^n$$

temos

$$\lim \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = \frac{|x|}{R}.$$

Logo:

- se $|x| < R \Rightarrow$ série dos módulos converge $\Rightarrow$ série converge absolutamente se $|x| < R$,
- se $|x| > R \Rightarrow$ série dos módulos converge diverge e $\lim |a_n x^n| = +\infty$, logo a série diverge se $|x| > R$.

Usando $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ e o critério da raiz, procedia-se da mesma forma.

□

Chamamos *raio de convergência* da série ao valor

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

se estes limites existirem. (Em geral: pode sempre tomar-se o limite superior - maior dos sublimites - que existe sempre $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$).

Quando $|x-a| = R$, a série pode divergir ou convergir absolutamente ou simplesmente. O intervalo de convergência será então da forma

$$]a-R, a+R[, \quad \text{ou } [a-R, a+R], \quad \text{ou }]a-R, a+R], \quad \text{ou } [a-R, a+R[.$$

Exemplos:

1. $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}(x-1)^n$, $R = 1$
   - série converge absolutamente em $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$;
   - série diverge em $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$;
   - em $x = 0, 2$ converge absolutamente (comparação com $\sum \frac{1}{n^2}$)

Domínio de convergência: $D = [0, 2]$.

2. $\sum \frac{1}{n2^n}(x+1)^n$,$R = 2$
   - série converge absolutamente em $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$;
   - série diverge em $|x+1| > 2 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$;
   - em $x = 1$ diverge, em $x = -3$ converge simplesmente.

   Domínio de convergência: $D = [-3, 1[$.

3. $\sum \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$, $R = 1/2$.
   Domínio de convergência: $D =]-1/2, 1/2[$.

4. $\sum \frac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$ logo a série converge absolutamente, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   Domínio de convergência: $D = \mathbb{R}$.

5. $\sum n!(x-2)^n$, $R = 0$, logo a série converge (absolutamente) unicamente em $x = 2$, diverge para $x \neq 2$.

   Domínio de convergência: $D = \{2\}$.

6. $\sum \frac{x^{2n}}{1+4^n}$: fazer $y = x^2$.
   Domínio de convergência: $D =]-2, 2[$.

7. $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$: fazer $y = x^2$.
   Domínio de convergência: $D = \mathbb{R}$.

Funções definidas por séries de potências:

Dada uma série de potências com domínio de convergência D, podemos definir uma função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \ x \in D$$

(ou seja, $f(x)$ = soma da série em x). Neste caso f diz-se *analítica* em D.

Há muitos casos em que conseguimos somar a série e determinar a função. Por outro lado, estaremos também interessados em, dada uma função f determinar se é analítica, ou seja, se é dada por uma série de potências. Chama-se a este processo *desenvolver a função em série.*

Exemplos: Com a série geométrica:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$,

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ -1 < x < 1,$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-x/2} = \frac{x}{2-x}, \ -1 < x/2 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$

Propriedades das funções analíticas:

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, com raio de convergência R.

1. f é contínua em $]a-R, a+R[$;
2. f é primitivável em $]a-R, a+R[$ e qualquer sua primitiva é analítica em $]a-R, a+R[$, com
$$P(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P((x-a)^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1};$$
3. f é diferenciável em $]a-R, a+R[$ e a sua derivada é analítica em $]a-R, a+R[$, com
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-a)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n(x-a)^{n-1}.$$

Diz-se que a série pode ser primitivada e derivada termo a termo, no interior do seu intervalo de convergência.

Reparem que temos então f' é também analítica, portanto de 3. é diferenciável e f'' é analítica, e aplicando 3. sucessivamente (i.e., por indução matemática...) temos que qualquer função analítica f é indefinidamente diferenciável.

Aula 40 – 17/12/2015

Exemplos:

1. Já vimos
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ -1 < x < 1.$$
Derivando ambos os membros, temos para $x \in]-1,1[$:
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}x^n$$
logo
$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+2}x^n, \quad -1 < x < 1,$$

e derivando ambos os membros de novo,

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)(-1)^{n+1}x^{n-1}.$$

Por outro lado, primitivando ambos os membros, temos $P\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(x+1)$ em $x > -1$, logo no domínio de convergência $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

Para $x = 0$ temos $\ln(1) = C + 0 \Rightarrow C = 0$, logo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Por exemplo, com $x = 1/2$ temos

$$\ln(3/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n},$$

e também, por continuidade uma vez que a série converge, com $x = 1$ temos

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{série harmónica alternada}$$

2. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $-1 < x < 1$, logo

$$\operatorname{arctg} x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

com $C = 0$.
Por exemplo, com $x = 1$ (por continuidade):

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;\Rightarrow\; \pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots.$$

3. Em potências de $x - 1$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

em $|-(x-1)| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}$$

(Exercício: em potências de $x - 2$.)

4. $\dfrac{1}{2+x}$ em potências de $x+1$ e de x.

NOTA: Usando o método de decomposição em fracções simples (e os exemplos acima), pode ver-se que qualquer função racional é analítica, num intervalo centrado em qualquer ponto a. Por ex., com $a = 0$:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} + \frac{1}{1-x}$$

Logo, se $|x/2| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e se $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, ou seja, para $-1 < x < 1$, temos

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Vamos agora ver a questão seguinte: se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, qual a *relação dos coeficientes* a_n *com* f: temos

- $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n + ...$ logo $f(a) = a_0$;
- $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + ... + na_n(x-a)^{n-1} + ...$ logo $f'(a) = a_1$;
- $f''(x) = 2a_2 + 3!a_3(x-a) + ... + n(n-1)(x-a)^{n-2} + ...$ logo $f''(a) = 2a_2$;
- $f'''(x) = 3!a_3 + ... + n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} + ...$ logo $f'''(a) = 3!a_3$.

Por indução, pode ver-se que:

$$\text{Se } f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ então } a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Definição 6.7 (Série de Taylor)**.** A série de Taylor de $f : D \to \mathbb{R}$ centrada em a é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Vimos que qualquer série de potências é a série de Taylor de uma função f, o que nos permite em particular, determinar as derivadas de ordem n em a e daí classificar extremos.

Por ex., como para $-1 < x < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n,$$

temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$

A série de Taylor de $f : D \to \mathbb{R}$ centrada em a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Vimos que se f é dada por uma série de potências num domínio centrado em a então essa série *é a série de Taylor* em a.

Inversamente, dada a série de Taylor de uma dada função f num ponto a (e assumindo que converge absolutamente em x) será que temos sempre

$$f(x) = \text{série de Taylor?}$$

O próximo exemplo mostra que nem sempre:

Exemplo: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Pode ver-se que esta função tem todas as derivadas em 0, e aliás que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, a sua série de Taylor é a série nula, converge em $\mathbb{R}$, e neste caso f não coincide com a sua série de Taylor em 0 (não é analítica em nenhuma vizinhança de 0):

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

No entanto, em grande parte dos casos relevantes pode garantir-se que a função coincide com a sua série de Taylor. Reparem que a sucessão de somas parciais desta série é dada por

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = p_{n,a}(x)$$

é o *polinómio de Taylor* de ordem n de f em a, ou seja, para cada x fixo tal que a série de Taylor converge absolutamente, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \lim_{n\to\infty} p_{n,a}(x).$$

Como sabemos que

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \iff p_{n,a}(x) = f(x) - R_{n,a}(x)$$

em que $R_{n,a}(x)$ é o resto de ordem n (em x), conclui-se que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \lim_{n\to\infty} p_{n,a}(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0.$$

Sendo D o domínio de convergência (absoluta) da série, temos

$$f \text{ coincide com a sua série de Taylor em } D \text{ sse } \lim R_{n,a}(x) = 0, \forall x \in D.$$

<u>Série de Taylor da exponencial</u> $f(x) = e^x$.

Como $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

que tem raio de convergência ∞ (verificar), ou seja, converge absolutamente em $\mathbb{R}$.

O polinómio de Taylor de grau n em $a = 0$ é

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

e usando a fórmula do erro de Lagrange temos para algum c entre x e 0,

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty$$

já que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fixo. Logo, temos que f coincide com a sua série de Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, calculamos agora somas de algumas séries que já vimos convergir (usando critérios de convergência):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1/e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e}.$$

Séries de Taylor de seno e coseno: $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Como $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{n\pi}{2})$, temos $f^{(2n)}(0) = 0$, e $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo a série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

que também tem raio de convergência ∞ (verificar), ou seja, converge absolutamente em $\mathbb{R}$.

Usando a fórmula do erro de Lagrange, e notando que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, temos para cada x e para algum c entre x e 0,

$$|R_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty$$

Logo, temos que f coincide com a sua série de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma, ou derivando a série acima, temos

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

NOTAS:

1. *Limites notáveis*:

   Temos para $x \neq 0$,
$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$
   Como a série à direita converge também para $x = 0$, com soma 1, e define uma função contínua em 0, temos
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
   Da mesma forma,
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. *Definição de* e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ *por séries de potências:*

   Podemos usar séries de potências para *definir* funções: por ex., podíamos definir
$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
   no seu domínio de convergência $\mathbb{R}$. Temos
$$E(0) = 1, \quad E'(x) = E(x), \quad E(1) = e$$
   (usando sucessões, em que $e = \lim(1 + 1/n)^n$). Definindo produto de séries, pode ver-se que $E(x)E(y) = E(x+y)$, logo $E(x \cdot 1) = E(1)^x = e^x$.

   Da mesma forma, *definindo*
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
   pode ver-se que $S'(x) = C(x)$, $C + (x) = -S(x)$, $S(0) = 0$, $C(0) = 1$, e que $S^2(x) + C^2(x) = 1$, o que dá a definição geométrica de seno e coseno.

A partir das séries de Taylor de e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ saem agora desenvolvimentos em série de muitas outras funções:

Exemplos:

1. $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$,

   $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$,

   $xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$,

2. $\operatorname{sen}(2x) + \cos(3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

   $\operatorname{sen}(2x) + x\cos(3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{3^{2n}}{(2n)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}$

3. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

   $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

   (Notem que os desenvolvimentos em série reflectem que $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$: $\operatorname{ch} x$ potências pares e $\operatorname{sh} x$ as potências ímpares.)

   Tomando $i^2 = -1$ e admitindo que este desenvolvimento em série é válido em $\mathbb{C}$, temos $\operatorname{ch}(ix) = \cos(x)$ e $\operatorname{sh}(ix) = i \operatorname{sen} x$, e $e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen} x$.

FIM.