Análise Matemática I

2º Semestre de 2005/06

3ª Aula Prática - Semana 13-3 a 17-3

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. Vamos só deduzir as propriedades para a adição (e subtraccção). As provas para a multiplicação e (divisão) são semelhantes.

   a) $-0 = 0$: do Axioma 4 (Existência de elemento neutro), temos $0+0 = 0$. Logo, por definição de simétrico, o simétrico de 0 será $-0 = 0$.

   b) Por definição de simétrico (e pela comutatividade da adição - Axioma 1), temos $(-x) + x = 0$. Logo, o simétrico de $-x$ será $-(-x) = x$,

   c) Temos $xy + x(-y) = x(y + (-y))$, pela distributividade (Axioma 3). Pela definição de simétrico, $y + (-y) = 0$, logo $xy + x(-y) = x \cdot 0 = 0$, ou seja, o simétrico de xy é $-(xy) = x(-y)$

   As outras igualdades verificam-se de forma semelhante.

2. a) Temos $x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0$,. Logo o simétrico de x é $-x = (-1)x$.

   Dado x, temos agora $(-x)(-x) = ((-1)x)\,((-1)x) = (-1)(-1)x^2 = x^2$ (onde usámos associatividade e (c) do exercício anterior).

   b) Pela definição de subtraccção temos $(x - y) + (y - z) = (x + (-y)) + (y + (-z))$ e pela associatividade (Axioma 2) e definição de simétrico, temos $(x + (-y)) + (y + (-z)) = x + ((-y) + y) + (-z) = x + 0 + (-z)$, ou seja, como 0 é elemento neutro, $(x - y) + (y - z) = x - z$.

   c) Temos, pela associatividade e comutatividade da adição (Axiomas 2 e 1), e pela definição de subtracção, que $(x + y) + (-x - y) = (x + y) + (-x + (-y)) = (x + (-x)) + (y + (-y)) = 0 + 0 = 0$. Logo, pela definição de simétrico, o simétrico de $-(x+y)$ será $-(x+y) = -x-y$. Da mesma forma, $-(x - y) = -x + y$.

   d) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ - da mesma forma que (c).

   e) Calculando $x(y - z) + xz$ temos, pela distributividade (Axioma 3) $x(y - z) + xz = x((y - z) + z)$. Agora pela associatividade da adição (Axioma 2), $x(y-z)+xz = x((y-z)+z) = x(y-z+z) = x(y+0) = xy$. Logo, pela definição de subtracção, $x(y - z) = xy - xz$.

   f) Pela associatividade e comutatividade da multiplicação (Axiomas 2 e 1), e pela definição de divisão $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right)(yw) = \frac{x}{y}\left(\frac{z}{w}w\right)y = \frac{x}{y}(zy) = \left(\frac{x}{y}y\right)z = xz$. Logo, $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{xz}{yw}$.

3. b) Seja $x > 0$. Se $x^{-1} \leq 0$, temos $x\,x^{-1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0$, o que é uma proposição falsa. Logo $x^{-1} > 0$.

   (Alternativamente, de c) do exercício seguinte, como $x\,x^{-1} = 1 > 0$, temos $(x > 0 \wedge x^{-1} > 0) \vee (x < 0 \wedge x^{-1} < 0)$. Logo $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$.)

   c) Como $x > 1 \Rightarrow x > 0$, temos, da alinea anterior, que $x^{-1} > 0$. Por outro lado,

$$x > 1 \wedge x^{-1} > 0 \Rightarrow x\,x^{-1} > 1 \cdot x^{-1} \Leftrightarrow 1 > x^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} < 1.$$

4. a) Do Ex.3.a), da associatividade e comutatividade da adição, e da definição de simétrico (Axiomas 2, 1 e 5) temos

$$\begin{aligned} &x < y \Leftrightarrow x + (-x) < y + (-x) \Leftrightarrow 0 < y + (-x) \Leftrightarrow \\ &-y < ((-y) + y) + (-x) \Leftrightarrow -y < -x \Leftrightarrow -x > -y. \end{aligned}$$

   (Alternativamente, como $-1 < 0$ e, do Ex.2.a), $(-1)x = -x$, temos $x < y \Leftrightarrow (-1)x > (-1)y \Leftrightarrow -x > -y$.)

   c) $(\Leftarrow)$ Temos

$$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0 \cdot y \Leftrightarrow xy > 0,$$

$$x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0 \cdot y \Leftrightarrow xy > 0.$$

   Logo, $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow xy > 0$.

   $(\Rightarrow)$ Por outro lado,

$$xy > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow y > 0$$

   (uma vez que, se $x > 0$ e $y \leq 0$, então $xy \leq 0$) e da mesma maneira

$$xy > 0 \wedge x < 0 \Rightarrow y < 0.$$

   Logo, $xy > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$. (Note-se que se $xy > 0$ então $x \neq 0$ e $y \neq 0$.)

   d) De (c).

   e) De (d).

5. Seja $a > 0$. Se $a \geq 1$ então $a + \frac{1}{a} \geq 1 + \frac{1}{a}$. Como $\frac{1}{a} > 0$ se $a > 0$ (de Ex.3.b)), temos $1 + \frac{1}{a} > 1$ e, por transitividade, $a + \frac{1}{a} \geq 1$. Se $0 < a < 1$, então, de Ex.3.c), (uma vez que $a = (a^{-1})^{-1}$), temos $a^{-1} > 1$, e da mesma forma $a + \frac{1}{a} \geq a + 1 \geq 1$. Conclui-se que $\forall_{a>0}\, a + \frac{1}{a} \geq 1$.

6. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$ (provar!), logo $-x$, x^{-1}, $x + y \in \mathbb{Q}$.

7. Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x + y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x + y) - x$ seria racional. Mas $(x + y) - x = y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x + y$ é irracional.

   Para mostrar $x - y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

   Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais: por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

   $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$, $\quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$, $\quad$ etc.

8. a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$:
   Para $n = 1$, temos $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira. Suponhamos por hipótese de indução que, para certo $n \in \mathbb{N}_1$, temos $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Então,

   $$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

   como queriamos mostrar.

   e) $\frac{3^{n-1}}{n!} < \frac{19}{n^2}$, para qualquer número natural $n \geq 4$:
   Para $n = 4$, temos

   $$\frac{3^3}{4!} < \frac{19}{16} \Leftrightarrow \frac{3^2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{19}{16} \Leftrightarrow \frac{9}{8} < \frac{19}{16} \Leftrightarrow \frac{18}{16} < \frac{19}{16},$$

   que é uma proposição verdadeira.
   Suponhamos agora por hipótese de indução que, para certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\frac{3^{n-1}}{n!} < \frac{19}{n^2}$. Queremos mostrar que neste caso

   $$\frac{3^n}{(n+1)!} < \frac{19}{(n+1)^2}. \tag{1}$$

   Então,

   $$\frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3 \cdot 3^{n-1}}{(n+1)n!} = \frac{3}{(n+1)} \cdot \frac{3^{n-1}}{n!}$$

logo, pela hipótese de indução, temos

$$\frac{3^n}{(n+1)!} < \frac{3\cdot 19}{(n+1)n^2}.$$

Pela propriedade transitiva, para mostrar (1), é suficiente mostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$,

$$\frac{3\cdot 19}{(n+1)n^2} < \frac{19}{(n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{n^2} < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 3(n+1) < n^2,$$

ou seja, que para $n \geq 4$, $n^2 - 3n - 3 > 0$. Analisando a equação (em $\mathbb{R}$) $x^2 - 3x - 3 = 0$, temos

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

e portanto $x^2 - 3x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{21}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.
Como $\frac{3+\sqrt{21}}{2} < \frac{3+\sqrt{25}}{2} = \frac{8}{2} = 4$, temos que para qualquer $x \geq 4$, $x^2 - 3x - 3 > 0$. Em particular, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $n^2 - 3n - 3 > 0$, como queriamos mostrar.

9. b) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$, a condição acima fica $a - 1 = a - 1$ que é uma proposição verdadeira.
Suponhamos agora por hipótese de indução que, para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$. Queremos mostrar que, para $n+1$,

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2} - 1.$$

Simplificando o lado esquerdo da equação acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) \quad = \quad (a-1)(1+a+\cdots+a^n) + (a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}.\\ &= a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}\\ &= a^{n+2} - 1,\end{aligned}$$

como queriamos demonstrar.

c) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n=0$, a condição fica $0=1-\frac{1}{1!} \Leftrightarrow 0=0$, que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos por hipótese de indução que para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$. Queremos ver que também

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=1-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &= 1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}\\ &= 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!}\\ &= 1-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queriamos mostrar.

e) $2n-3<2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:

Para $n=5$, temos que $10-3<2^3 \Leftrightarrow 7<8$, que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos por hipótese de indução que, para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n-3<2^{n-2}$. Queremos ver que também $2(n+1)-3<2^{(n+1)-2}$. Então,

$$2(n+1)-3=2n+2-3<2^{n-2}+2,$$

por hipótese. Como, para $n \geq 5$, temos $2<2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2}+2<2^{n-2}+2^{n-2}=2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1)-3<2^{n-1}.$$

f) 7^n-1 é divisível por 6[1] para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:

Para $n=1$, temos $7^1-1=6$, que é divísivel por 6.

Suponhamos por hipótese de indução que para certo $n \in \mathbb{N}_1$, 7^n-1 é divísivel por 6. Queremos ver que também $7^{n+1}-1$ é divísivel por 6. Então:

$$7^{n+1}-1=7\cdot 7^n-1=(6+1)7^n-1=6\cdot 7^n+7^n-1.$$

Uma vez que $6\cdot 7^n$ é divisível por 6, e, por hipótese, 7^n-1 também, a sua soma será também divisível por 6.

[1] Um número é divisível por 6 sse é da forma $6k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

10. Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$:

Para $n = 0$, a condição fica $(1+a)^0 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos por hipótese de indução que, para certo $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$. Queremos mostrar que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. Então, temos que

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a),$$

por hipótese de indução, e

$$(1+na)(1+a) = 1 + a + na + a^2 = 1 + (n+1)a + a^2 > 1 + (n+1)a$$

uma vez que $a^2 > 0$. Logo, $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$, como queriamos mostrar.

11. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par".

a) Vamos ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ou seja, que se $n^2 + 3n + 1$ é par, também $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é par. Temos

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4.$$

Assumindo que $n^2 + 3n + 1$ é par, como $2n + 4 = 2(n+2)$ é também par, conclui-se que $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ sendo uma soma de numeros pares será par.

b) Não.

c) Indução... (Como acima: se $n^2 + 3n + 1$ é impar, $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ será uma soma de um numero impar com um numero par, e será portanto impar. Mas neste caso $P(0)$ é verdadeira: 1 é impar.)