Análise Matemática I

2º Semestre de 2005/06

3ª Aula Prática - Semana 13-3 a 17-3

1. (Exercício I.1 de [1]) Deduza a partir dos axiomas dos números reais:

   a) $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$,

   b) $\forall_x \; -(-x) = x$, $\forall_{x\neq 0}(x^{-1})^{-1} = x$,

   c) $\forall_{x,y}\, x(-y) = (-x)y = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$.

2. Deduza a partir dos axiomas dos números reais:

   a) $\forall_x \; -x = (-1)x$, $(-x)(-x) = x^2$,

   b) $\forall_{x,y,z}\, (x-y)+(y-z) = x-z$,

   c) $\forall_{x,y} \; -(x+y) = -x-y$, $-(x-y) = -x+y$

   d) $\forall_{x\neq 0, y\neq 0}\, (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

   e) $\forall_{x,y,z}\, x(y-z) = xy - xz$,

   f) $\forall_{x,y\neq 0,z,w\neq 0}\, \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{xz}{yw}$,

   g) $\forall_{x,y\neq 0,z\neq 0,w\neq 0}\, \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{xw}{yz}$.

3. (Exercício I.2 de [1]) Deduza as propriedades:

   a) $\forall_{x,y,z}\, z+y < y+z \Leftrightarrow x < y$,

   b) $\forall_x\, x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$,

   c) $\forall_x\, x > 1 \Leftrightarrow x^{-1} \in]0,1[$.

4. Deduza as propriedades:

   a) $\forall_{x,y}\, x < y \Rightarrow -x > -y$,

   b) $\forall_{x,y}\, 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$,

   c) $\forall_{x,y} xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$,

   d) $\forall_{x\neq 0}\, x^2 > 0$,

   e) $\forall_x\, x^2 + 1 \neq 0$.

5. Verifique que $\forall_{a>0}\, a + \frac{1}{a} \geq 1$.

6. Mostre que se x, y são racionais, então $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também racionais.[1]

7. (Exercício I.3 de [1]) Prove que, se x é um racional diferente de zero e y um irracional, $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

8. (Exercícios 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$,

   b) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$,

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$,

   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$,

   e) $\frac{3^{n-1}}{n!} < \frac{19}{n^2}$, para qualquer número natural $n \geq 4$.

9. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

   b) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\ldots+a^n)=a^{n+1}-1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

   c) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

   d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

   e) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

   f) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$,

   g) 7^n-1 é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

10. (Exercício 1.20 de [2]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,
$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

11. Seja $P(n)$ a condição "n^2+3n+1 é par".

    a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

[1] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ verifica os axiomas de corpo. É fácil ver que também verifica os axiomas de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

c) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é impar.

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.