Análise Matemática I

2º Semestre de 2005/06

2ª Aula Prática - Semana 6-3 a 10-3

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. Fazer tabelas de verdade.

2. Ver Texto de apoio - Lógica, pag.18-19.

3. a) Falsa em $\mathbb{R}$ (a condição é falsa para $x = 0$). Verdadeira em $\mathbb{N}_1$.

   b) Verdadeira em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$.

   c) Verdadeira em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$ (note-se que se $x \in \mathbb{N}_1$ então $x^2 \in \mathbb{N}_1$).

   d) Falsa em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$: por exemplo, para $x = 1$ e $x = 2$ ter-se-ia simultaneamente $y = 1$ e $y = 4$.

   e) Falsa em $\mathbb{R}$: por exemplo, para $y = 0$ e $x \neq 0$, não existe nenhum z com $x = yz$. Falsa em $\mathbb{N}_1$: por exemplo, para $x = 1$ e $y = 2$ ter-se-ia $z = \frac{1}{2}$, que não é um numero natural.

   f) Verdadeira em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$: por exemplo, para x, y tais que $x = y$, a condição quantificada transforma-se numa proposição verdadeira.

   g) Falsa em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$: por exemplo, para $x = 1$, $y = 2$ a igualdade é falsa.

4. a) Falsa em $\mathbb{R}$: se $x = 0$ a equivalência é falsa e, logo, a condição quantificada não é verdadeira para todo o x. Verdadeira em $\mathbb{N}_1$: qualquer que seja $x \in \mathbb{N}_1$, tem-se que $x^2 > 0$ é verdadeira e, portanto, a equivalência é verdadeira para qualquer $x \in \mathbb{N}_1$.

   b) Verdadeira em $\mathbb{R}$: se x é não positivo a implicação é verdadeira. Falsa em $\mathbb{N}_1$: se $x \in \mathbb{N}_1$ então $x > 0$ é verdadeira e a implicação é necessariamente falsa.

   c) Verdadeira em $\mathbb{R}$: a cada número real x corresponde um outro real (raiz cúbica de x) y, tal que $y^3 = x$ é verdadeira. Falsa em $\mathbb{N}_1$: se $x = 2$ (por exemplo) não existe nenhum $y \in \mathbb{N}_1$ tal que $y^3 = x$ (a raiz cúbica de um natural não é necessariamente um número natural).

   d) Falsa em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{N}_1$: não existe nenhum número y tal que y^3 possa assumir mais do que um valor e, por conseguinte, que y^3 possa ser igual a todos os reais ou a todos os naturais.

e) Verdadeira em $\mathbb{R}$: para x e y quaisquer, se $x \geq y$ a implicação é trivialmente verdadeira e, se $x < y$, como $]x, y[\neq \emptyset$, tomando z neste intervalo, a implicação é verdadeira. Falsa em $\mathbb{N}_1$: se x e y são dois naturais tais que $y = x + 1$, então não existe nenhum natural tal que $x < z < y$ e, logo, para certas escolhas de naturais x, y a implicação é falsa para qualquer escolha de z natural.

5. a) $x > z \wedge |f(x)| \geq \epsilon$,
   b) $|f(x)| < \epsilon \wedge x \leq z$,
   c) $\exists_x y \neq x^2$,
   d) $\forall_y y \neq x^2$,
   e) $\exists_x \exists_y z - x \neq x - y$,
   f) $\forall_x \exists_y z - x \neq x - y$,
   g) $\forall_x \forall_y z - x \neq x - y$,
   h) $\exists_y \forall_z \exists_x x > z \wedge |f(x)| \leq y$,
   i) $\exists_y \forall_z \exists_x x < z \wedge |f(x)| \leq y$.

6. a) Verdadeira; b) Falsa; c) Falsa; d) Falsa; e) Falsa;
   f) Verdadeira.

7. a) Verdadeira; b) Verdadeira; c) Falsa; d) Falsa; e) Verdadeira;
   f) Verdadeira; g) Verdadeira; h) Falsa.

8. $\emptyset$ tem 0 elementos;, $\{\emptyset\}$ tem 1 elemento, , $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tem 2 elementos, $\{\{\emptyset\}\}$ tem 1 elemento.

   Algumas relações de inclusão e pertença:

$$\emptyset \in \{\emptyset\}, \quad \emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$$
$$\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

9. Por exemplo, $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$. Se A é um conjunto arbitrário, pode fazer-se por exemplo $B = A \cup \{A\}$, e tem-se que $A \subset B$ e $A \in B$.

10. a) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tem 1 elemento; $P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\})$ tem 2 elementos.
    b) $\{x\} \in P(A) \Leftrightarrow \{x\} \subset A \Leftrightarrow x \in A$.

11. a) Bijectiva; b) Injectiva, não sobrejectiva; c) Injectiva, não sobrejectiva.

12. a) f é injectiva: se $x^3 = z^3$, então, pela unicidade da raiz cúbica, necessariamente $x = z$. É sobrejectiva: qualquer que seja y existe x tal que $x^3 = y$ (existência de raiz cúbica de qualquer real). Logo, é bijectiva.

b) g é injectiva: se $x, y \in \mathbb{N}$ então $x, y \geq 0$ e, portanto, se $x^2 = y^2$ tem-se, por unicidade da raiz quadrada, $x = y$. Não é sobrejectiva: por exemplo, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $g(x) = 2$. Não é bijectiva.

c) h não é injectiva: por exemplo, $-2 \neq 2$ e, no entanto, $h(-2) = h(2)$. É sobrejectiva: dado qualquer $y \in \mathbb{R}^+$, se $x = 1 + \frac{1}{y}$, então $h(x) = y$. Não é bijectiva.

d) F não é injectiva nem sobrejectiva (justificação trivial). Não é bijectiva.

e) G é injectiva: se x, y são dois naturais quaisquer, então trivialmente, $x \neq y \Rightarrow G(x) \neq G(y)$. Não é sobrejectiva: por exemplo, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $G(x) = \frac{1}{2}$. Não é bijectiva.

f) $f(C) = \{-1, 0, 1\}$, $f(D) = [-8, 27]$, $f(\mathbb{N}) = \{n^3 : \ n \in \mathbb{N}\}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
$g(C) = \{0, 1, 2\}$, $g(D) = [-1, 4]$, $g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_1$, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
$h(C) = \{0, 1\}$, $h(D) = [0, 3]$, $h(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.