Análise Matemática I

2^{o} Semestre de 2005/06

2^{a} Aula Prática - Semana 6-3 a 10-3

1. (Exercício 1.2 de [1], excepto a)) Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, são verdadeiras as proposições:

   a) $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$,

   b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$,

   c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ (Regra do contra-recíproco),

   d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,

   e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

2. Use a regra do contra-recíproco para mostrar que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\, n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par.}$$

3. (Exercício 1.3 de [1]) Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio a) o conjunto dos reais e b) o conjunto dos naturais não nulos:

   a) $\forall_x\ x^2 + 1 > 1$,

   b) $\forall_x\ x > 2 \Rightarrow x > 1$,

   c) $\forall_x \exists_y\ y = x^2$,

   d) $\exists_y \forall_x\ y = x^2$,

   e) $\forall_{x,y} \exists_z\ x = yz$,

   f) $\exists_{x,y}\ (x - y)^2 = x^2 - y^2$,

   g) $\forall_{x,y}\ (x - y)^2 = x^2 - y^2$.

4. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio i) o conjunto dos reais e ii) o conjunto dos naturais não nulos, justificando abreviadamente as suas respostas:

   a) $\forall_x\ (x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 \neq 0)$,

   b) $\exists_x\ (x > 0 \Rightarrow x^2 + 1 < 1)$,

   c) $\forall_x \exists_y\ y^3 = x$,

d) $\exists_y \forall_x \; y^3 = x$,

e) $\forall_x \forall_y \exists_z \; (x < y \;\Rightarrow\; x < z < y)$.

5. (Exercício 1.6 de [1]) Escreva a negação de cada uma das proposições e condições seguintes:

   a) $x > z \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$,

   b) $|f(x)| < \epsilon \Rightarrow x > z$,

   c) $\forall_x y = x^2$,

   d) $\exists_y y = x^2$,

   e) $\forall_x \forall_y z - x = x - y$,

   f) $\exists_x \forall_y z - x = x - y$,

   g) $\exists_x \exists_y z - x = x - y$,

   h) $\forall_y \exists_z \forall_x x > z \Rightarrow |f(x)| > y$,

   i) $\forall_y \exists_z \forall_x x < z \Rightarrow |f(x)| > y$.

6. Indique quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$,

   b) $\{1\} \in \mathbb{N}$,

   c) $\{1, \emptyset\} \subset \{1, 2, 3\}$,

   d) $0 \in \{(0, 0), (0, 1)\}$

   e) $\emptyset \in \{0\}$,

   f) $\emptyset \subset \{0\}$

7. (Exercício 2.1.4 de [1]) Indique quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\emptyset \subset \emptyset$,

   b) $1 \in \{1\}$,

   c) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$,

   d) $1 \in \{2\}$,

   e) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$,

   f) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$,

   g) $1 \in \mathbb{R}$,

   h) $1 \in \{\mathbb{R}\}$.

8. (Exercício 2.1.5 de [1]) Quantos elementos têm os conjuntos seguintes:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\}?$$

Indique algumas proposições verdadeiras que exprimam relações de inclusão e relações de pertença entre os conjuntos dados.

9. (Exercício 2.1.6 de [1]) Indique dois conjuntos A e B para os quais seja verdadeira a proposição $(A \in B) \wedge (A \subset B)$. Seja agora A um conjunto arbitrário. Construa um conjunto B para o qual a proposição anterior seja verdadeira.

10. (Exercício 2.1.7 de [1]) Sendo A um conjunto arbitrário, chama-se conjunto das partes de A, e designa-se por $P(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$ é $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

    a) Quantos elementos têm os conjuntos $P(\emptyset)$ e $P(P(\emptyset))$?

    b) Verifique que $x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \in P(A)$.

11. (Exercício 2.3.3 de [1]) Classifique quanto a ser injectiva, sobrejectiva ou bijectiva, as seguintes funções:

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) = x, \\ g : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}, & g(x) = x^{-1}, \\ F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & F(x) = x + 1. \end{array}$$

12. Em cada uma das alíneas seguintes diga, justificando abreviadamente, se a aplicação indicada é injectiva, sobrejectiva ou bijectiva.

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3,$

    b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2,$

    c) $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^+, \qquad h(x) = \frac{1}{|x-1|}$

    d) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = 1,$

    e) $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad G(x) = x.$

13. (Exercício 2.3.7 de [1]) Dadas as aplicações de $\mathbb{R}$ em si mesmo definida por

$$f(x) = x^3\,, \qquad g(x) = x + 1\,, \qquad h(x) = |x|\,,$$

e os conjuntos $C = \{-1, 0, 1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x < 3\}$, determine os conjuntos $f(C)$, $g(C)$, $h(C)$, $f(D)$, $g(D)$, $h(D)$, $f(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{N})$, $h(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R})$.

Outros exercícios: Exercício 2.1.7, 2.1.8, 2.2.1, 2.3.2 de [1].

[1] J. Campos Ferreira. Elementos de Lógica e Teoria de Conjuntos, 2001.