Instituto Superior Técnico

Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

Teoria da Computação

7 de Maio de 2019 Teste 2A Duração: 1h

Grupo I (5+2 valores)

Seja $\mathcal{F}_A$ o conjunto das funções (possivelmente parciais) $f : \{0,1\}^* \to \{a, b\}$.

a) Mostre, por diagonalização, que $\mathcal{F}_A$ não é numerável.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}_A$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Fixe-se um alfabeto Σ. Para cada linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ considere-se a linguagem

$$\mathrm{IG}_L = \{M \in \mathcal{M}^\Sigma : L_{\mathrm{ac}}(M) = L\}.$$

Grupo II (6 valores)

Demonstre que IG_L é indecidível se e só se L é reconhecível.

Sugestão: use, se possível, o teorema de Rice.

Grupo III (4+3 valores)

Considere $S_A = \{M_1\$M_2 : M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\Sigma \text{ e } L_{\mathrm{ac}}(M_1) \cup L_{\mathrm{rj}}(M_2) = \Sigma^*\}$.

a) Escolha apropriadamente uma linguagem reconhecível L para a qual possa demonstrar que $\mathrm{IG}_L \leq S_A$ (e demonstre-o).

b) Conclua, justificadamente, que S_A é indecidível (usando o resultado do Grupo II).

Instituto Superior Técnico

Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

Teoria da Computação

7 de Maio de 2019 | Teste 2B | Duração: 1h

Grupo I (5+2 valores)

Seja $\mathcal{F}_B$ o conjunto das funções (possivelmente parciais) $f : \{a, b\}^* \to \{a\}^*$.

a) Mostre, por diagonalização, que $\mathcal{F}_B$ não é numerável.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}_B$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Fixe-se um alfabeto Σ. Para cada linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ considere-se a linguagem

$$\mathrm{SUB}_L = \{M \in \mathcal{M}^\Sigma : L_{\mathrm{ac}}(M) \subseteq L\}.$$

Grupo II (6 valores)

Demonstre que SUB_L é indecidível se e só se $L \neq \Sigma^*$.

Sugestão: use, se possível, o teorema de Rice.

Grupo III (4+3 valores)

Considere $S_B = \{M_1\$M_2 : M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\Sigma \text{ e } L_{\mathrm{rj}}(M_1) \cap L_{\mathrm{rj}}(M_2) = \emptyset\}$.

a) Escolha apropriadamente uma linguagem $L \neq \Sigma^*$ para a qual possa demonstrar que $\mathrm{SUB}_L \leq S_B$ (e demonstre-o).

b) Conclua, justificadamente, que S_B é indecidível (usando o resultado do Grupo II).

Instituto Superior Técnico

Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

Teoria da Computação

7 de Maio de 2019 Teste 2C Duração: 1h

Grupo I (5+2 valores)

Seja $\mathcal{F}_C$ o conjunto das funções (possivelmente parciais) $f : \{0,1\}^* \to \{1\}^*$.

a) Mostre, por diagonalização, que $\mathcal{F}_C$ não é numerável.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}_C$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Fixe-se um alfabeto Σ. Para cada linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ considere-se a linguagem

$$\mathrm{DIF}_L = \{M \in \mathcal{M}^\Sigma : L_{\mathrm{ac}}(M) \neq L\}.$$

Grupo II (6 valores)

Demonstre que DIF_L é indecidível se e só se L é reconhecível.

Sugestão: use, se possível, o teorema de Rice.

Grupo III (4+3 valores)

Considere $S_C = \{M_1\$M_2 : M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\Sigma \text{ e } L_{\mathrm{rj}}(M_1) \cup L_{\mathrm{ac}}(M_2) \neq \Sigma^*\}$.

a) Escolha apropriadamente uma linguagem reconhecível L para a qual possa demonstrar que $\mathrm{DIF}_L \leq S_C$ (e demonstre-o).

b) Conclua, justificadamente, que S_C é indecidível (usando o resultado do Grupo II).

Instituto Superior Técnico

Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

Teoria da Computação

7 de Maio de 2019 | Teste 2D | Duração: 1h

Grupo I (5+2 valores)

Seja $\mathcal{F}_D$ o conjunto das funções (possivelmente parciais) $f : \{a\}^* \to \{0,1\}^*$.

a) Mostre, por diagonalização, que $\mathcal{F}_D$ não é numerável.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}_D$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Fixe-se um alfabeto Σ. Para cada linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ considere-se a linguagem

$$\mathrm{SUP}_L = \{M \in \mathcal{M}^\Sigma : L \subseteq L_{\mathrm{ac}}(M)\}.$$

Grupo II (6 valores)

Demonstre que SUP_L é indecidível se e só se $L \neq \emptyset$.

<u>Sugestão</u>: use, se possível, o teorema de Rice.

Grupo III (4+3 valores)

Considere $S_D = \{M_1\$M_2 : M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\Sigma \text{ e } L_{\mathrm{rj}}(M_1) = L_{\mathrm{rj}}(M_2) = \Sigma^*\}$.

a) Escolha apropriadamente uma linguagem $L \neq \emptyset$ para a qual possa demonstrar que $\mathrm{SUP}_L \leq S_D$ (e demonstre-o).

b) Conclua, justificadamente, que S_D é indecidível (usando o resultado do Grupo II).

Instituto Superior Técnico
Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

Teoria da Computação

7 de Maio de 2019 | Teste 2A - Resolução | Duração: 1h

Grupo I (5+2 valores)

Seja $\mathcal{F}_A$ o conjunto das funções (possivelmente parciais) $f : \{0,1\}^* \to \{a,b\}$.

a) Mostre, por diagonalização, que $\mathcal{F}_A$ não é numerável.

Resolução: Suponha-se, por absurdo, que $\mathcal{F}_A$ fosse numerável, ou seja, que existisse $h : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_A$ bijectiva. Por simplicidade, dado $i \in \mathbb{N}$, use-se $f_i \in \mathcal{F}_A$ para denotar a função $h(i)$.

Sabemos que $\{0,1\}^*$ é numerável, ou seja, existe $k : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ bijectiva. Por simplicidade, dado $j \in \mathbb{N}$, use-se $w_j \in \{0,1\}^*$ para denotar $k(j)$.

Considere-se a função $f : \{0,1\}^* \to \{a,b\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$f(w_n) = \begin{cases} a & \text{se } f_n(w_n) = b \\ b & \text{se } f_n(w_n) = a \\ b & \text{se } f_n(w_n) \text{ indefinido} \end{cases}.$$

Facilmente, tem-se que $f \neq f_i$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$. Nomeadamente, a palavra w_i distingue as funções pois, quando definido $f_i(w_i) = a$ se e só se $f(w_i) = b$, e quando $f_i(w_i)$ indefinido então $f(w_i) = b$. Conclui-se que h não é sobrejectiva, o que é uma contradição.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}_A$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Resolução: Seja $\mathcal{C}_A$ o conjunto das funções computáveis de $\mathcal{F}_A$. Sabendo que o conjunto das máquinas de Turing é numerável, é fácil mostrar que também $\mathcal{C}_A$ é numerável, ou seja, $\#\mathcal{C}_A = \#\mathbb{N}$. Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das máquinas de Turing sobre o alfabeto $\{0,1\}$ e $h : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ uma bijecção.

A função $k : \mathcal{C}_A \to \mathbb{N}$ tal que $k(f) = h(M_f)$ para alguma escolha de máquina de Turing M_f que calcule f é injectiva, pelo que $\mathcal{C}_A$ é contável. A função $g : \mathbb{N} \to \mathcal{C}_A$ tal que $g(n)(w) = \begin{cases} a & \text{se } |w| \leq n \\ b & \text{se } |w| > n \end{cases}$ é injectiva, pelo que $\mathcal{D}$ é infinito. Note-se que $g(n) \in \mathcal{C}_A$ pois é calculada pela máquina com $n+1$ estados de controlo que avança pelo input w e pela sequência de estados em simultâneo, devolvendo o output a (numa segunda fita) se o input termina até ao último estado, e b caso contrário.

Na alínea **a)** mostrámos que $\#\mathcal{F}_A \neq \#\mathbb{N}$. Obviamente tem-se $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}_A$ e portanto $\#\mathcal{C}_A \leq \#\mathcal{F}_A$. Mas então terá de ter-se $\#\mathcal{C}_A < \#\mathcal{F}_A$ e logo $\mathcal{F}_A \setminus \mathcal{C}_A \neq \emptyset$. Conclui-se que existem funções em $\mathcal{F}_A$ que não são computáveis.

Fixe-se um alfabeto Σ. Para cada linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ considere-se a linguagem

$$\mathrm{IG}_L = \{M \in \mathcal{M}^\Sigma : L_{\mathrm{ac}}(M) = L\}.$$

Grupo II (6 valores)

Demonstre que IG_L é indecidível se e só se L é reconhecível.

Sugestão: use, se possível, o teorema de Rice.

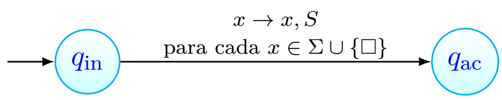
Resolução:

Se L não é reconhecível então não existe $M \in \mathcal{M}^\Sigma$ tal que $L_{\mathrm{ac}}(M) = L$ e portanto $\mathrm{IG}_L = \emptyset$. Obviamente, a linguagem vazia é decidida por uma máquina que rejeita todos os inputs.

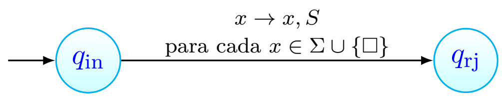
Se L é reconhecível então a indecidibilidade de IG_L é consequência imediata do teorema de Rice. Como $\mathrm{IG}_L \subseteq \mathcal{M}^\Sigma$, então basta mostrar que satisfaz três requisitos: (1) $\mathrm{IG}_L \neq \emptyset$, (2) $\mathrm{IG}_L \neq \mathcal{M}^\Sigma$, e (3) se $M_1 \in \mathrm{IG}_L$ e $M_1 \equiv M_2$ então $M_2 \in \mathrm{IG}_L$. Verificamos cada um deles.

(1) Como L é reconhecível existe uma máquina R tal que $L_{\mathrm{ac}}(R) = L$. Logo $R \in \mathrm{IG}_L$.

(2) Considere-se as máquinas M_{all}, representada graficamente por:



e $M_\emptyset$, representada graficamente por:



A máquina M_{all} aceita todos os *inputs*, isto é, $L_{\mathrm{ac}}(M_{\mathrm{all}}) = \Sigma^*$. A máquina $M_\emptyset$ rejeita todos os *inputs*, logo $L_{\mathrm{ac}}(M_\emptyset) = \emptyset$. Como $\Sigma^* \neq \emptyset$ pelo menos uma das duas máquinas M_{all} e $M_\emptyset$ não está em IG_L.

(3) se $M_1 \in \mathrm{IG}_L$ e $M_1 \equiv M_2$ então sabemos que $L_{\mathrm{ac}}(M_1) = L$ e $L_{\mathrm{ac}}(M_1) = L_{\mathrm{ac}}(M_2)$, donde se conclui que $L_{\mathrm{ac}}(M_2) = L$ e portanto $M_2 \in \mathrm{IG}_L$.

Grupo III (4+3 valores)

Considere $S_A = \{M_1 \$ M_2 : M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\Sigma \text{ e } L_{\rm ac}(M_1) \cup L_{\rm rj}(M_2) = \Sigma^*\}$.

a) Escolha apropriadamente uma linguagem reconhecível L para a qual possa demonstrar que $\mathrm{IG}_L \leq S_A$ (e demonstre-o).

Resolução: Tome-se $L = \Sigma^*$, que é reconhecida (mesmo decidida) por uma máquina que aceita todos os inputs.

Basta considerar a função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1,\$\}^*$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,\$\,\overline{x} & \text{se } x \in \mathcal{M}^\Sigma \\ \epsilon & \text{se } x \notin \mathcal{M}^\Sigma \end{cases}$$

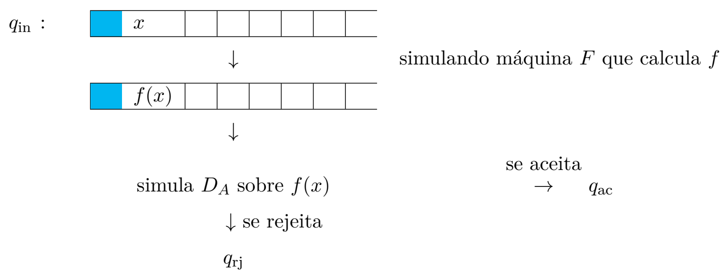
onde $\overline{x}$ é a máquina definida a partir de x que resulta de trocar o estado de aceitação com o estado de rejeição.

A função f é total, e computável por uma máquina que verifica se o *input* é uma máquina, devolvendo $x\,\$\,\overline{x}$ ou ϵ como *output* consoante o resultado. Se $x \notin \mathcal{M}^\Sigma$ então $f(x) = \epsilon \notin S_A$. Se $x \in \mathcal{M}^\Sigma$, então $f(x) = x\,\$\,\overline{x} \in S_A$ se e só se $L_{\rm ac}(x) \cup L_{\rm rj}(\overline{x}) = L_{\rm ac}(x) \cup L_{\rm ac}(x) = L_{\rm ac}(x) = \Sigma^*$ se e só se $x \in \mathrm{IG}_{\Sigma^*}$.

b) Conclua, justificadamente, que S_A é indecidível (usando o resultado do Grupo II).

Resolução: Sabemos da alínea **a)** que $\mathrm{IG}_{\Sigma^*} \leq S_A$, nomeadamente por intermédio da função computável $f : \{0,1\}^* \to \{0,1,\$\}^*$.

Se S_A fosse decidível existiria um classificador D_A tal que $L_{\rm ac}(D_A) = S_A$. Então, poder-se-ia construir a máquina D, descrita por:



Facilmente, D é um classificador pois a função f é total e D_A é um classificador. Além disso, D aceita x se e só se D_A aceita $f(x)$ se e só se $f(x) \in S_A$ se e só se $x \in \mathrm{IG}_{\Sigma^*}$. Mas então D decidiria a linguagem IG_{Σ^*}, em contradição com o resultado do Grupo II.