Instituto Superior Técnico

Lic. Engenharia Informática e de Computadores (Alameda)

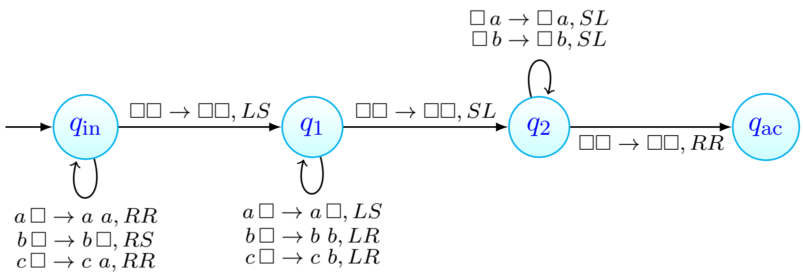
Teoria da Computação

15 de Abril de 2015 Teste 1A Duração: 1h30

Grupo I (5 valores)

Construa uma máquina de Turing que calcule a função que a cada palavra w sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ faz corresponder a palavra $a^{n_a+n_c}b^{n_b+n_c}$ onde n_a é o número de as que ocorre em w, n_b é o número de bs que ocorre em w, e n_c é o número de cs que ocorre em w. Nomeadamente, para a palavra $w = bcacb$ o resultado deverá ser $aaabbbb$. Apresente apenas a representação gráfica da máquina de Turing.

Resolução: Considere-se a máquina de Turing com alfabeto $\Gamma = \{a, b, c, \square\}$ e duas fitas bidireccionais, representada graficamente por:



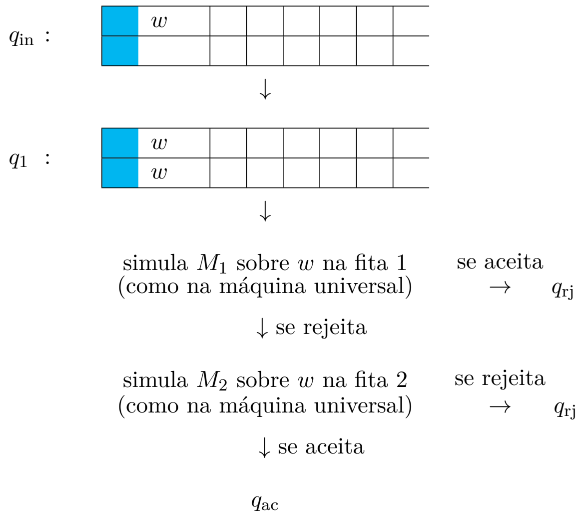
Grupo II (5 valores)

Sejam L_1, L_2 linguagens sobre o alfabeto Σ. Mostre que se L_1 é decidível e L_2 é reconhecível então $L_2 \setminus L_1$ é uma linguagem reconhecível.

Resolução: Assuma-se que L_1 é decidível e L_2 é reconhecível. Então, existem máquinas de Turing M_1 e M_2 tais que:

- $L_{\text{ac}}(M_1) = L_1$ e $L_{\text{rj}}(M_1) = \overline{L_1}$, e
- $L_{\text{ac}}(M_2) = L_2$.

Considere-se a máquina M, com duas fitas, que copia o input para a segunda fita, e de seguida simula M_1 na fita 1, e depois M_2 na fita 2, descrita por:



Tem-se que:

- se $w \in L_2 \setminus L_1$ então $w \in L_2$ e $w \notin L_1$, pelo que $w \in L_{\mathrm{ac}}(M_2)$ e $w \in L_{\mathrm{rj}}(M_1)$, ou seja M_2 aceita w e M_1 rejeita w, e portanto M aceita w, e

- se M aceita w então M_2 aceita w e M_1 rejeita w, pelo que $w \in L_2$ e $w \notin L_1$, ou seja $w \in L_2 \setminus L_1$.

Conclui-se que $L_{\mathrm{ac}}(M) = L_2 \setminus L_1$, e portanto $L_2 \setminus L_1$ é reconhecível.

Grupo III (3+2 valores)

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções de $\{1\}^*$ para $\{1\}^*$.

a) Mostre que $\mathcal{F}$ não é numerável.

Resolução: Suponha-se, por absurdo, que $\mathcal{F}$ fosse numerável, ou seja, que existisse $h : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ bijectiva. Por simplicidade, dado $i \in \mathbb{N}$, use-se $f_i \in \mathcal{F}$ para denotar a função $h(i)$.

Considere-se a função $f : \{1\}^* \to \{1\}^*$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f(1^n) = \begin{cases} f_{n+1}(1^n).1 & \text{se } f_{n+1}(1^n) \text{ definido} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Facilmente, tem-se que $f \neq f_i$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$. Nomeadamente, se $f_{n+1}(1^n) = 1^k$ então $f(1^n) = 1^{k+1}$, e se $f_{n+1}(1^n)$ indefinido então $f(1^n) = 1$. Conclui-se que h não é sobrejectiva, o que é uma contradição.

b) Mostre que existem funções em $\mathcal{F}$ que não são computáveis (pode assumir, enunciando-os claramente, os resultados relevantes relativos à cardinalidade do conjunto das máquinas de Turing).

Resolução: Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções computáveis de $\{1\}^*$ para $\{1\}^*$. Usando o Postulado de Church, e sabendo que o conjunto das máquinas de Turing é numerável, é fácil mostrar que também $\mathcal{C}$ é numerável, ou seja, $\#\mathcal{C} = \#\mathbb{N}$. Seja $\mathcal{T}$ o conjunto das máquinas de Turing sobre o alfabeto $\{1\}$ e $h : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ uma bijecção.

A função $k : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ tal que $k(f) = h(M_f)$ para alguma escolha de máquina de Turing M_f que calcule $f \in \mathcal{C}$ é injectiva, pelo que $\mathcal{C}$ é contável. A função $g : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$ tal que $g(n)$ é a função $g_n : \{1\}^* \to \{1\}^*$ tal que $g_n(w) = 1^n$ para qualquer $w \in \{1\}^*$ é injectiva, pelo que $\mathcal{C}$ é infinito. Note-se que $g_n \in \mathcal{C}$ pois é calculada pela máquina com duas fitas bidireccionais e $n+1$ estados de controlo que ignora o input w, escreve n 1s na segunda fita e usa o $n+1$-ésimo estado para retroceder para o início do output antes de aceitar.

Na alínea **a)** mostrámos que $\#\mathcal{F} \neq \#\mathbb{N}$. Obviamente tem-se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ e portanto $\#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{F}$. Mas então terá de ter-se $\#\mathcal{C} < \#\mathcal{F}$ e logo $\mathcal{F} \setminus \mathcal{C} \neq \emptyset$. Conclui-se que existem funções em $\mathcal{F}$ que não são computáveis.

Grupo IV (2+3 valores)

Considere a linguagem

$$L_A = \{M\$w : M \text{ é uma máquina de Turing que rejeita } w\}.$$

a) Mostre que L_A é reconhecível.

Resolução: Considere-se a máquina R descrita por:

q_{in} : | | M | \$ | w | | |

↓

verifica se o *input* é da forma $M\$w$ onde M é uma máquina e $w \in \{0,1\}^*$ — se não → q_{rj}

↓ se sim

simula M sobre w (como na máquina universal) — se aceita → q_{rj}

↓ se rejeita

q_{ac}

Tem-se que:

- se M é uma máquina e M rejeita w então R aceita $M\$w$, e

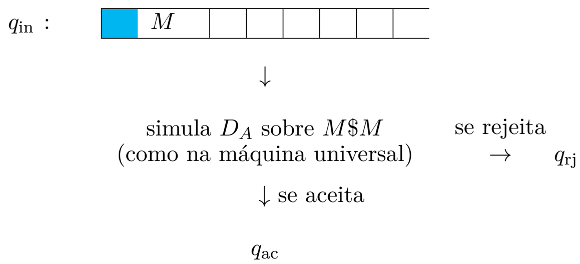
– se R aceita $M\$w$ então M é uma máquina e M rejeita w.

Conclui-se que $L_{\text{ac}}(R) = L_A$, e portanto L_A é reconhecível.

b) Mostre que L_A não é decidível.

Resolução: Suponha-se, por absurdo, que L_A fosse decidível. Então existiria uma máquina de Turing D_A que decidia L_A, isto é, $L_{\text{ac}}(D_A) = L_A$ e $L_{\text{rj}}(D_A) = \overline{L_A}$.

Considere-se a máquina de Turing T descrita por:



Tem-se que T é um classificador, pois D_A é um classificador. Portanto, há duas hipóteses:

– se T aceita M então D_A aceita $M\$M$, e portanto $M\$M \in L_A$ o que significa que M é uma máquina que rejeita M, e

– se T rejeita M então D_A rejeita $M\$M$, e portanto $M\$M \notin L_A$ o que significa que M não é uma máquina de Turing, ou M aceita M.

Excutando a máquina T sobre o input T, conclui-se que T aceita T se e só se T rejeita T, o que é uma contradição.