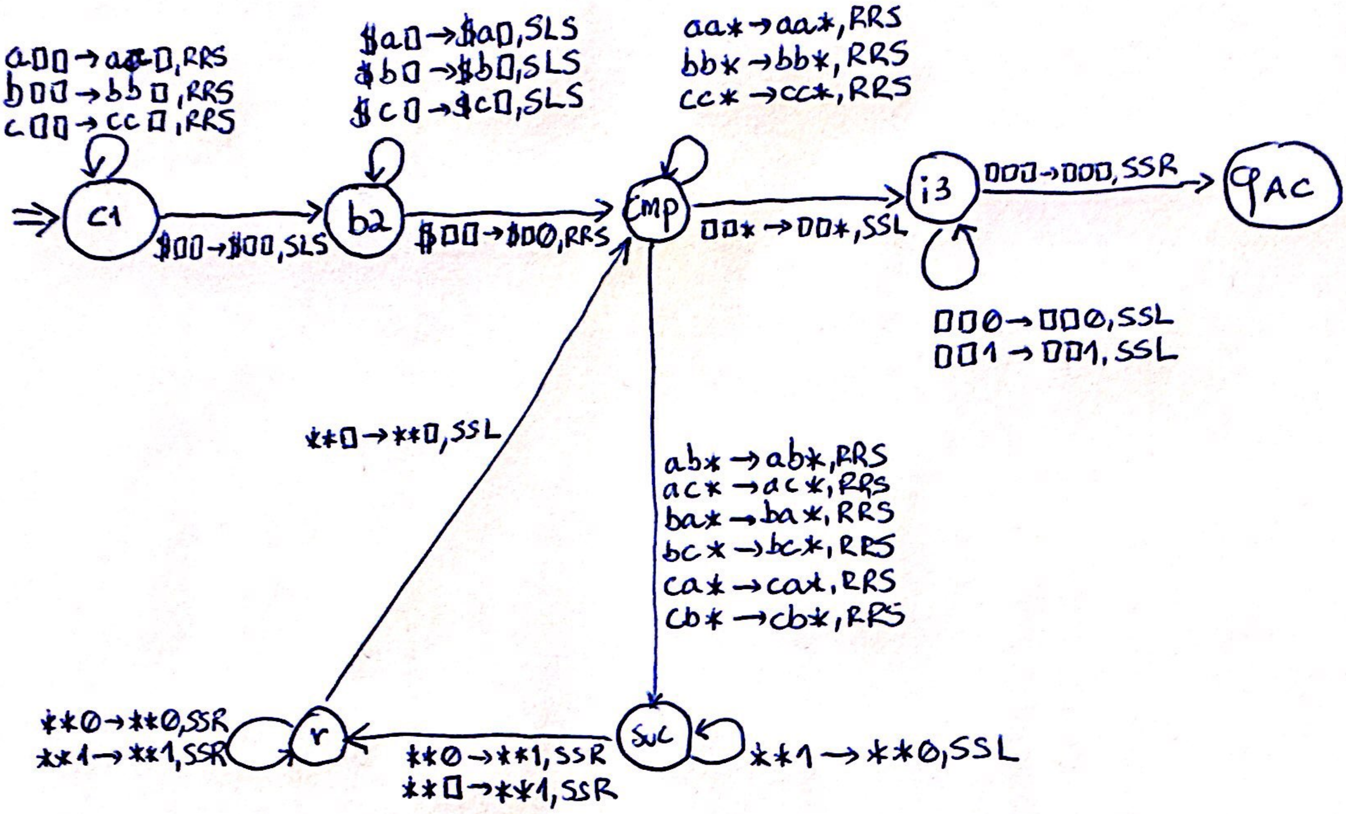
Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$. A *distância de Hamming* entre duas palavras $x = x_1 \dots x_k \in \Sigma^*$ e $y = y_1 \dots y_k \in \Sigma^*$ com o mesmo comprimento é $\#\{i \in \{1, \dots, k\} : x_i \neq y_i\}$, ou seja, o número de posições em que as palavras diferem.

Construa uma máquina de Turing que dado um par de palavras em Σ^* com o mesmo comprimento calcule a sua distância de Hamming (em representação binária).

Por exemplo, para o *input* $a\underline{a}b\underline{b}c\underline{c}c\$a\underline{b}b\underline{a}c\underline{a}c$ a distância de Hamming é 3 (correspondendo aos símbolos sublinhados no *input*, nas posições $2, 4$ e 6) pelo que o *output* deverá ser 11.

Considere-se a máquina com três fitas bidireccionais definida abaixo,



onde * representa qualquer símbolo do alfabeto {a,b,c,0,1,$,□}.

A máquina começa por copiar a primeira string para a fita 2 (estado c1), regressando ao início dessa string (estado b2).
Inicializa a fita 3 com 0, ao entrar no estado de comparação (cmp).
A cada par de símbolos diferentes nas fitas 1 e 2, a máquina transita para o estado suc onde realiza o sucessor do nº em binário na fita 3, regressando ao seu bit menos significativo (estado r) antes de prosseguir.
Finalmente, no estado i3, posiciona a cabeça de leitura/escrita no início do output na fita 3, antes de terminar, calculando assim a distância de Hamming.

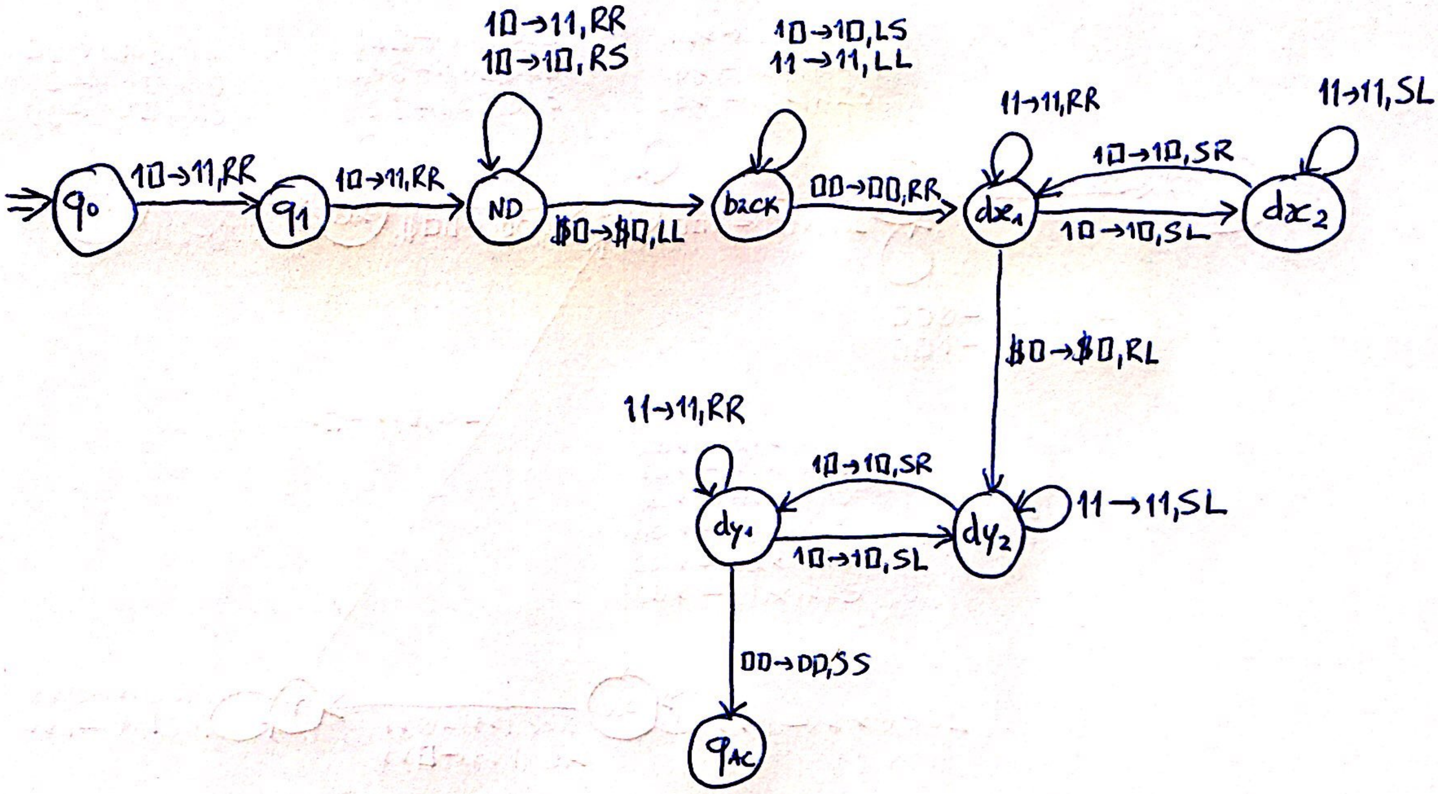
Considere a linguagem S_B formada pelas palavras da forma

$$x\$y$$

em que $x, y \in \{1\}^*$ são números representados em unário com algum divisor comum diferente de 1.

Mostre que $S_B \in \mathbf{NTIME}(n^2)$.

Considere-se a seguinte máquina de Turing não-determinista com duas fitas bidireccionais.



A máquina começa por escrever na fita 2 um número $1 < z \leq x$, garantido que $1 < z$ (estados q_0, q_1) e $z \leq x$ (não-deterministicamente no estado ND). [FASE1]
Regressada ao início de ambas as fitas (estado back), verifica-se [FASE2] nos estados dx_1, dx_2 se z é divisor de x, e nos estados [FASE3] dy_1, dy_2 se z é divisor de y, aceitando-se se for verdade para ambos, pelo que a máquina decide S_B.
A performance temporal da máquina resulta da soma das três fases pelo que $ntime_M(n) = O(n) + O(n) + O(n) = O(n)$.
Como a máquina é equivalente a uma máquina com apenas 1 fita com uma desaceleração quadrática, tem-se portanto que

$$S_B \in NTIME(n^2)$$

Seja Σ um alfabeto. Considere a linguagem

$$L_2 = \{M \in \mathcal{M}^{\Sigma} : \text{qualquer que seja } w \in \Sigma^* \text{ se } w \in L_{\mathbf{ac}}(M) \text{ então } ww \notin L_{\mathbf{rj}}(M)\}.$$

Mostre que L_2 é indecidível.

$L_2 = \{ M \in \mathcal{M}^{\Sigma} : \text{ se } w \in L_{AC}(M) \text{ então } ww \notin L_{RJ}(M) \}$

Mostramos que L_2 é indecidível usando o Teorema de Rice.

(0) Por definição, $L_2 \subseteq \mathcal{M}^{\Sigma}$

(1) $L_2 \neq \emptyset$ pois a seguinte máquina $M_{ALL} \in L_2$

M_{ALL}: input w
aceita

se $w \in L_{AC}(M_{ALL})$ [que é sempre o caso] então $ww \in L_{AC}(M_{ALL})$ e
portanto $ww \notin L_{RJ}(M_{ALL})$

(2) $L_2 \neq \mathcal{M}^{\Sigma}$ pois a seguinte máquina $M_{IMPAR} \notin L_2$

M_{IMPAR}: input w
se $|w|$ é par rejeita
senão aceita

Para qualquer $a \in \Sigma$, $a \in L_{AC}(M_{IMPAR})$ pois $|a| = 1$ é ímpar
mas $aa \in L_{RJ}(M_{IMPAR})$ pois $|aa| = 2$ é par

(3) se $M_1 \equiv M_2$ e $M_1 \in L_2$ então

se $w \in L_{AC}(M_2)$ então $w \in L_{AC}(M_1)$ [pois $L_{AC}(M_1) = L_{AC}(M_2)$]

e portanto $ww \notin L_{RJ}(M_1)$ [pois $M_1 \in L_2$]

pelo que $ww \notin L_{RJ}(M_2)$ [pois $L_{RJ}(M_1) = L_{RJ}(M_2)$]

concluindo-se que $M_2 \in L_2$

Satisfazendo as condições do Teorema de Rice, L_2 é indecidível //

Seja L_{cp} uma linguagem $\mathbf{NP}$-completa.

Assuma que $L \leq_P L_{\text{cp}}$. Pode garantir que:

(a) L é $\mathbf{NP}$-completa?
(b) $(L \cup L_{\text{cp}}) \in \mathbf{NP}$?

Justifique cuidadosamente ambas as respostas.

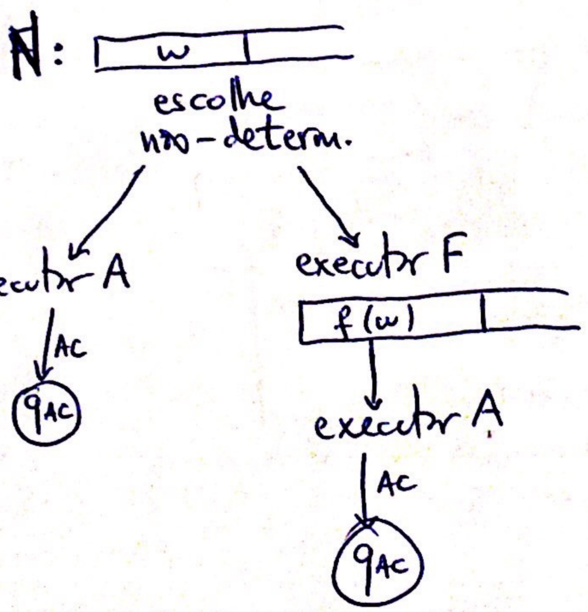
L_{cp} é NP-completa e $L \le_p L_{cp}$

(a) L NP-completa? Em geral, não!

Seria se tivéssemos $L_{cp} \le_p L$, usando a transitividade de $\le_p$.
Por exemplo, $L \le_p L_{cp}$ para qualquer linguagem $L \in P$.
Ter-se-ia ainda de garantir que $L \in NP$, nesse caso.

(b) $L \cup L_{cp} \in NP$? Sim, pois $L_{cp} \in NP$, por redução $L \in NP$, e a classe é fechada para união.

Seja A máquina não-determinista com $ntime_A(n) = O(n^a)$ que decida L_{cp}.
Seja F máquina determinista com $time_F(n) = O(n^b)$ que calcula f tal que $w \in L$ sse $f(w) \in L_{cp}$.
Considere-se a seguinte máquina não-determinista



N é classificadora por A ser e N decide $L \cup L_{cp}$.

- se N aceita w no ramo da esquerda então A aceita w e $w \in L_{cp}$;
  se N aceita w no ramo da direita então A aceita $f(w)$, $f(w) \in L_{cp}$ e portanto $w \in L$.
- se $w \in L_{cp}$ então N aceita w no ramo da esquerda;
  se $w \in L$ então N aceita w no ramo da direita pois $f(w) \in L_{cp}$

Temos $ntime_N(n) \le \max\left(ntime_A(n), time_F(n) + ntime_A\left(n + time_F(n)\right)\right)$

i.e. $\max\left(O(n^a), O\left(n^b + (n+n^b)^a\right)\right) = O(n^{ab})$

e portanto $L \cup L_{cp} \in NP$ //

Seja Σ um alfabeto. Considere a linguagem

$$L = \{M\$w : M \in \mathcal{M}^{\Sigma}, w \in \Sigma^* \text{ e } M \text{ aceita } w \text{ em } 2^{|w|} \text{ transições (ou menos)}\}.$$

Demonstre que $L \in \mathbf{EXPTIME}$.
Sabendo que $L \notin \mathbf{P}$, conclua que $\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{EXPTIME}$.

$L = \{ M\#w : M \text{ aceita } w \text{ em até } 2^{|w|} \text{ transições} \}$

- **$L \in$ EXPTIME**

Considere-se a seguinte máquina

A: input x
se x não é da forma $M\#w \rightarrow q_{rej}$
senão inicializa relógio a zero (com $|w|$ bits)
e simula M sobre w (usando a máq. universal)
incrementando o relógio a cada passo

SE ACEITA ANTES DE $2^{|w|}$ PASSOS $\rightarrow q_{ac}$

SE EXCEDE $2^{|w|}$ PASSOS $\rightarrow q_{rej}$

A decide L pois A aceita x sse x é da forma $M\#w$
e M aceita w em até $2^{|w|}$ passos

Tem-se $time_A(n) = O(n) + 2^n \times \big(O(n) + O(n)\big) = 2^{O(n)}$

Correspondendo ao tempo de inicializar o relógio, mais 2^n vezes o tempo necessário a simular cada transição (proporcional ao tamanho da máquina) mais o tempo necessário a incrementar o relógio.

Mesmo que usemos uma fita auxiliar para o relógio, a desaceleração quadrática garante ainda que $L \in$ EXPTIME.

- Sabendo que $L \notin P$, basta notar que $P \subseteq$ EXPTIME para concluir que $P \subsetneq$ EXPTIME.

Basta ver que se $S \in P$ então S é decidido por máquina M com $time_M(n) = O(n^a) = O(2^n)$ [pois todo o polinómio é dominado por uma exponencial]
pelo que $S \in$ EXPTIME.