

Duração: 90 minutos

1º Teste A

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Uma biblioteca universitária é frequentada por três categorias de utentes: alunos, docentes e funcionários. Da consulta dos registos concluiu-se que: 50% dos utentes são alunos, 30% são docentes e 20% são funcionários. Apurou-se também que: 25% dos utentes são alunos que requisitaram livros; 6% são docentes que requisitaram livros; e 4% são funcionários que requisitaram livros. Tendo sido selecionado ao acaso um utente da biblioteca:

(a) Calcule a probabilidade de o utente selecionado ter requisitado livros da biblioteca. (1.5)

• **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A = \{\text{utente é aluno}\}$	$P(A) = 0.5$
$D = \{\text{utente é docente}\}$	$P(D) = 0.3$
$F = \{\text{utente é funcionário}\}$	$P(F) = 1 - P(A) - P(D) = 0.2$
$R = \{\text{utente requisitou livros}\}$	$P(R) = ?$
$R \cap A = \{\text{utente requisitou livros e é aluno}\}$	$P(R \cap A) = 0.25$
$R \cap D = \{\text{utente requisitou livros e é docente}\}$	$P(R \cap D) = 0.06$
$R \cap F = \{\text{utente requisitou livros e é funcionário}\}$	$P(R \cap F) = 0.04$

• **Acontecimento**

$R = \{\text{utente requisitou livros}\}$

• **Probabilidade pedida**

Tirando partido do facto de os acontecimentos A , D e F constituírem uma partição do espaço de resultados Ω , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P[(R \cap A) \cup (R \cap D) \cup (R \cap F)] \\
 &= P(R \cap A) + P(R \cap D) + P(R \cap F) \\
 &= 0.25 + 0.06 + 0.04 \\
 &= 0.35.
 \end{aligned}$$

(b) Sabendo que o utente escolhido requisitou livros, determine a probabilidade de ser um aluno. (1.0)

• **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
 P(A | R) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \quad (\text{def. de probabilidade condicionada}) \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{0.25}{0.35} \\
 &= \frac{5}{7}.
 \end{aligned}$$

(c) São $\{\text{utente requisitou livros}\}$ e $\{\text{utente é um aluno}\}$ acontecimentos independentes? (1.5)

- **Averiguação de independência**

Uma vez que os acontecimentos R e A se dizem independentes se e só se $P(R \cap A) = P(R) \times P(A)$ e que

$$\begin{aligned} P(R \cap A) &= 0.25 \\ &\neq \\ P(R) \times P(A) &= 0.35 \times 0.5 \\ &= 0.175, \end{aligned}$$

pode afirmar-se que R e A não são acontecimentos independentes.

[Em alternativa, recordemos que, caso A e R sejam acontecimentos independentes (ambos com probabilidades não nulas), $P(A | R) = P(A)$. Ora,

$$\begin{aligned} P(A | R) &= \frac{5}{7} \\ &\neq \\ P(A) &= 0.5, \end{aligned}$$

pelo que pode concluir-se que A e R não são acontecimentos independentes.]

2. Em 1938, o físico Frank Benford propôs a seguinte função de probabilidade para a variável aleatória X que representa o primeiro algarismo de um número inteiro genuíno escrito em base decimal:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Constatou-se também que o primeiro algarismo de um número inteiro fraudulento, doravante representado pela variável aleatória Y , possui distribuição uniforme no conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$.

(a) Obtenha as modas de X e Y .

(2.0)

- **Variável aleatória X**

X = primeiro algarismo de um número inteiro escrito em base decimal

- **Moda de X**

Represente-se a moda de X por $mo(X)$. Então

$$mo(X): P[X = mo(X)] = \max_{x \in \{1, 2, \dots, 9\}} P(X = x).$$

Atendendo a que $P(X = 1) = 0.301$ é superior a qualquer dos restantes valores da f.p. de X , temos $mo(X) = 1$.

- **Variável aleatória Y**

Y = primeiro algarismo de um número inteiro FRAUDULENTO em base decimal

- **Distribuição de Y**

$Y \sim$ uniforme discreta($\{1, 2, \dots, 9\}$)

- **Ep. de Y**

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & y = 1, 2, \dots, 9 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- **Moda de Y**

Neste caso temos

$$mo(Y): P[Y = mo(Y)] = \max_{y \in \{1, 2, \dots, 9\}} P(Y = y).$$

Dado que a f.p. de Y é constante em $\{1, 2, \dots, 9\}$, a moda não é única. Com efeito, todos os valores possíveis desta v.a. são valores modais, i.e., $mo(Y) = 1, 2, \dots, 9$.

(b) Determine e compare $P(X > 3)$ e $P(Y > 3)$.

(2.0)

• **Probabilidades pedidas**

$$\begin{aligned}P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\&= 1 - \sum_{x=1}^3 P(X = x) \\&= 1 - (0.301 + 0.176 + 0.125) \\&\approx 1 - 0.602 \\&= 0.398 \\P(Y > 3) &= \sum_{y=4}^9 P(Y = y) \\&= \sum_{y=4}^9 \frac{1}{9} \\&= \frac{9 - 4 + 1}{9} \\&= \frac{2}{3} \\&\approx 0.6667\end{aligned}$$

• **Comentário**

Em caso de fraude o primeiro algarismo será superior a 3 mais frequentemente que na ausência de fraude. [Poderemos tirar partido deste e de outros factos para emitir alertas de fraude.]

(c) Ao examinar um registo fiscal selecionado ao acaso, uma inspectora suspeita de fraude com probabilidade 0.1. Calcule o valor esperado do número de registos examinados até que a inspectora suspeite de fraude pela primeira vez. Indique as suas hipóteses de trabalho. (2.0)

• **Variável aleatória de interesse**

R = registos examinados até que a inspectora suspeite de fraude pela primeira vez

• **Hipóteses de trabalho**

Admitiremos que:

- a inspectora examina os registos de modo independente;
- a probabilidade de suspeita de fraude se mantém constante ao longo dos exames aos registos.

• **Distribuição de R**

$R \sim \text{geométrica}(p)$

com

$p = P(\text{suspeita de fraude}) = 0.1$

• **Valor esperado de R**

$$\begin{aligned}E(R) &\stackrel{\text{form.}}{=} \frac{1}{p} \\&= 10 \text{ registos.}\end{aligned}$$

Grupo II

10 valores

1. Admita que a função de distribuição da velocidade de impacto (X , em milhas náuticas por hora) de ondas em cascos de navios em determinada região do globo é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Obtenha a probabilidade de a velocidade de impacto de uma onda pertencer ao intervalo $[1, 1.5]$. (1.0)

• **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
 P(1 \leq X \leq 1.5) &= P(X \leq 1.5) - P(X \leq 1) \\
 &= F_X(1.5) - F_X(1) \\
 &= \left(1 - e^{-1.5^2}\right) - \left(1 - e^{-1^2}\right) \\
 &= e^{-1} - e^{-2.25} \\
 &\approx 0.2625.
 \end{aligned}$$

(b) Sabendo que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $V(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$, obtenha um valor aproximado para a probabilidade de a velocidade média de impacto de 50 ondas ser superior a 1. (3.0)

• **V.a.**

X_i = velocidade de impacto da onda i , $i = 1, \dots, n$
 $n = 50$

• **Distribuição, valor esperado e variância comuns**

$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \dots, n$
 $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $i = 1, \dots, n$
 $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$, $i = 1, \dots, n$

• **Nova v.a.**

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ = velocidade média de impacto de n ondas

• **Valor esperado e variância de \bar{X}**

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times n E(X) = E(X) = \mu$
 $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i \text{ indep.}}{=} \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2} \times n V(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

• **Distribuição aproximada de \bar{X}**

Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

• **Valor aproximado da probabilidade pedida**

Atendendo a que $\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$ e $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{50} \approx 4.292 \times 10^{-3}$, temos

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} > 1) &= 1 - P(\bar{X} \leq 1) \\
 &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
 &\stackrel{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1 - 0.8862}{\sqrt{4.292 \times 10^{-3}}}\right) \\
 &\approx 1 - \Phi(1.74) \\
 &\stackrel{tabela/calcul.}{\approx} 1 - 0.9591 \\
 &= 0.0409.
 \end{aligned}$$

2. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam, respetivamente, o número de dias consecutivos em que há equipamento parado e o número de trabalhadores dispensados numa fábrica de componentes eletrónicas, quando há necessidade de proceder à manutenção ou reparação de alguma máquina. Admita que a função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada por:

X	Y		
	0	1	2
1	0.3	0.1	0
2	0.1	0.2	0.05
3	0.05	0.1	0.1

(a) Determine o valor da função de distribuição conjunta no ponto (2, 1). (1.0)

- **Par aleatório** (X, Y)

X = número de dias consecutivos em que há equipamento parado

Y = número de trabalhadores dispensados

- **Fp. conjunta**

$P(X = x, Y = y)$ (ver enunciado).

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(2,1) &= P(X \leq 2, Y \leq 1) \\ &= \sum_{x=1}^2 \sum_{y=0}^1 P(X = x, Y = y) \\ &= 0.3 + 0.1 + 0.1 + 0.2 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

(b) Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória $Y | X = 3$.

(2.5)

- **V.a.**

$Y | X = 3$

- **Fp. de $Y | X = 3$**

Atendendo a que

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \sum_{y=0}^3 P(X = 3, Y = y) \\ &= 0.05 + 0.1 + 0.1 \\ &= 0.25, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} P(Y = y | X = 3) &= \frac{P(X = 3, Y = y)}{P(X = 3)} \\ &= \begin{cases} \frac{0.05}{0.25} = 0.2, & x = 0 \\ \frac{0.1}{0.25} = 0.4, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de $Y | X = 3$**

$$\begin{aligned} E(Y | X = 3) &= \sum_{y=0}^2 y \times P(Y = y | X = 3) \\ &= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

- **Variância de $Y | X = 3$**

$$\begin{aligned} V(Y | X = 3) &= E(Y^2 | X = 3) - E^2(Y | X = 3) \\ &= \left[\sum_{y=0}^2 y^2 \times P(Y = y | X = 3) \right] - 1.2^2 \\ &= (0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.4) - 1.2^2 \\ &= 2 - 1.44 \\ &= 0.56. \end{aligned}$$

(c) Obtenha o valor da covariância entre X e Y . Que conclui?

(2.5)

- **Covariância entre X e Y**

Uma vez que se pretende calcular

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y),$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y .

- **Ep. conjunta e f.p. marginais**

$P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_{y=0}^2 P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_{x=1}^3 P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y			$P(X = x)$
	0	1	2	
1	0.3	0.1	0	0.4
2	0.1	0.2	0.05	0.35
3	0.05	0.1	0.1	0.25
$P(Y = y)$	0.45	0.4	0.15	1

- **Valor esperado de XY**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^3 \sum_{y=0}^2 xy \times P(X = x, Y = y) \\ &= 1 \times 1 \times 0.3 + 2 \times 1 \times 0.1 + 2 \times 2 \times 0.05 + 3 \times 1 \times 0.1 + 3 \times 2 \times 0.1 \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^3 x \times P(X = x) \\ &= 1 \times 0.4 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.25 \\ &= 1.85 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de Y**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^2 y \times P(Y = y) \\ &= 0 \times 0.45 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.15 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

- **Covariância entre X e Y (cont.)**

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 1.6 - 1.85 \times 0.7 \\ &= 0.305 \end{aligned}$$

- **Conclusão**

- Visto que $cov(X, Y) \neq 0$ podemos concluir que X e Y são v.a. DEPENDENTES.
- Dado que $cov(X, Y) > 0$ podemos adiantar que X e Y tenderão a variar no mesmo sentido relativamente aos respectivos valores esperados.