



Duração: 90 minutos

2º teste A

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Tem-se assumido que o impacto hidrodinâmico, X , do casco de um navio sobre uma onda em determinada região do globo possui distribuição exponencial de parâmetro λ desconhecido, com valores medidos em unidades apropriadas. Tendo por base uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ de X :

(a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ para uma realização $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ da amostra aleatória tal que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 19.39$. (3.0)

• **V.a. de interesse**

X = impacto hidrodinâmico do casco de um navio sobre uma onda

• **Distribuição**

$X \sim$ exponencial(λ)

• **F.d.p. de X**

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

• **Parâmetro desconhecido**

$\lambda, \lambda > 0$

• **Amostra**

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ amostra de dimensão n proveniente da população X

• **Obtenção da estimativa de MV de λ**

Passo 1 — Função de verosimilhança

$$\begin{aligned} L(\lambda|\underline{x}) &= f_{\underline{X}}(\underline{x}) \stackrel{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda e^{-\lambda x_i}) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

Passo 2 — Função de log-verosimilhança

$$\ln L(\lambda|\underline{x}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

Passo 3 — Maximização

A estimativa de MV de λ é doravante representada por $\hat{\lambda}$ e atente-se que $\hat{\lambda} = \operatorname{argmax}_{\lambda} L(\lambda|\underline{x}) = \operatorname{argmax}_{\lambda} \ln L(\lambda|\underline{x})$. Neste caso em particular:

$$\hat{\lambda} : \begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{d \ln L(\lambda|\underline{x})}{d \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} &= 0 && \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \frac{d^2 \ln L(\lambda|\underline{x})}{d \lambda^2} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} &< 0 && \text{(ponto de máximo)} \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \\ -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} &< 0 \\ \hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \right\} \\ \text{Proposição verdadeira já que } \sum_{i=1}^n x_i > 0. \end{cases}$$

• **Passo 4 — Estimativa de MV de λ**

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &\stackrel{n=10}{=} \frac{10}{19.39} \\ &\simeq 0.515729.\end{aligned}$$

- (b) Tendo em vista a estimação do valor esperado de X , compare a eficiência do estimador \bar{X} (1.5) relativamente ao estimador $T = \frac{X_1 + X_{10}}{2}$.

• **Parâmetro desconhecido**

$$\mu = E(X)$$

• **Estimador de $\mu = E(X)$**

$$\bar{X}$$

• **Erro quadrático médio de \bar{X}**

$$\begin{aligned}EQM_{\mu}(\bar{X}) &= V(\bar{X}) + [bias_{\mu}(\bar{X})]^2 \\ &= V(\bar{X}) + [E(\bar{X}) - \mu]^2 \\ &\stackrel{X_i \sim i.i.d.X}{=} \frac{V(X)}{n} + [E(X) - E(X)]^2 \\ &= \frac{V(X)}{n} \quad [\text{onde } V(X) = 1/\lambda^2 \text{ e } n = 10.] \end{aligned}$$

• **Outro estimador de $\mu = E(X)$**

$$T = \frac{X_1 + X_{10}}{2}$$

• **Erro quadrático médio de T**

$$\begin{aligned}EQM_{\mu}(T) &= V(T) + [bias_{\mu}(T)]^2 \\ &= V(T) + [E(T) - \mu]^2 \\ &= V\left(\frac{X_1 + X_{10}}{2}\right) + \left[E\left(\frac{X_1 + X_{10}}{2}\right) - E(X)\right]^2 \\ &\stackrel{X_i \sim i.i.d.X}{=} \frac{2V(X)}{4} + \left[\frac{2E(X)}{2} - E(X)\right]^2 \\ &= \frac{V(X)}{2} \end{aligned}$$

• **Eficiência do estimador \bar{X} relativamente ao estimador $T = \frac{X_1 + X_{10}}{2}$**

$$\begin{aligned}e_{\mu}(\bar{X}, T) &= \frac{EQM_{\mu}(T)}{EQM_{\mu}(\bar{X})} \\ &\stackrel{n=10}{=} \frac{\frac{V(X)}{2}}{\frac{V(X)}{10}} \\ &= 5\end{aligned}$$

• **Comentário**

Tendo em conta que $e_{\mu}(\bar{X}, T) = 5 > 1$ (i.e., $EQM_{\mu}(T) > EQM_{\mu}(\bar{X})$) pode afirmar-se que \bar{X} é um estimador mais eficiente que $T = \frac{X_1 + X_{10}}{2}$ no que respeita à estimação de $\mu = E(X)$.

2. Para estudar o consumo de combustível em automóveis do modelo 1 (resp. 2), considerou-se a variável aleatória X_1 (resp. X_2) denotando a quilometragem efetuada por litro (km/litro) de combustível por um automóvel do modelo 1 (resp. 2) escolhido ao acaso. Tendo selecionado ao acaso 8 automóveis do modelo 1 e 9 automóveis do modelo 2 e registado as respetivas quilometragens efetuadas por litro de combustível, observaram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^8 x_{1i} = 194.7, \quad \sum_{i=1}^8 x_{1i}^2 = 4743.69, \quad \sum_{i=1}^9 x_{2i} = 280.9, \quad \sum_{i=1}^9 x_{2i}^2 = 8954.45$$

Assumindo que as quilometragens efetuadas por litro de combustível em automóveis dos modelos 1 e 2 possuem distribuição normal com igual variância:

- (a) Obtenha um intervalo de confiança a 90% para a variância da quilometragem efetuada por litro de combustível em automóveis do modelo 2. (2.5)

• **V.a. de interesse**

X_2 = quilometragem efetuada por litro de combustível em automóveis do modelo 2

• **Situação**

$X_2 \sim \text{normal}(\mu_2, \sigma_2^2)$

μ_2 desconhecido

σ_2^2 DESCONHECIDO

• **Obtenção do IC para σ_2^2**

Passo 1 — Seleção da v.a. fulcral para σ_2^2

$$Z = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{(n_2-1)}^2$$

uma vez que é suposto determinar um IC para a variância de uma população normal, com valor esperado desconhecido.

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

Ao ter-se em consideração que $n_2 = 9$ e $(1 - \alpha) \times 100\% = 90\%$, far-se-á uso dos quantis

$$(a_\alpha, b_\alpha) : \begin{cases} P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha \\ P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \alpha/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\alpha = F_{\chi_{(n_2-1)}^2}^{-1}(\alpha/2) = F_{\chi_{(8)}^2}^{-1}(0.05) \stackrel{\text{tabela/calcul.}}{=} 2.733 \\ b_\alpha = F_{\chi_{(n_2-1)}^2}^{-1}(1 - \alpha/2) = F_{\chi_{(8)}^2}^{-1}(0.95) \stackrel{\text{tabela/calcul.}}{=} 15.51. \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \leq b_\alpha\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\frac{1}{b_\alpha} \leq \frac{\sigma_2^2}{(n_2-1)S_2^2} \leq \frac{1}{a_\alpha}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\frac{(n_2-1)S_2^2}{b_\alpha} \leq \sigma_2^2 \leq \frac{(n_2-1)S_2^2}{a_\alpha}\right] = 1 - \alpha$$

Passo 4 — Concretização

Atendendo ao par de quantis acima e ao facto de

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \frac{1}{n_2 - 1} \left[\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 - n_2 (\bar{x}_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{9 - 1} [8954.45 - 9 \times (280.9/9)^2] \\ &= 23.406(1) \end{aligned}$$

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\sigma_2^2) = \left[\frac{(n_2 - 1) s_2^2}{F_{\chi_{(n_2-1)}^2}^{-1}(1 - \alpha/2)}, \frac{(n_2 - 1) s_2^2}{F_{\chi_{(n_2-1)}^2}^{-1}(\alpha/2)} \right],$$

segue-se:

$$\begin{aligned} IC_{90\%}(\sigma_2^2) &= \left[\frac{(9 - 1) \times 23.406(1)}{15.51}, \frac{(9 - 1) \times 23.406(1)}{2.733} \right] \\ &\approx [12.0728, 68.5149]. \end{aligned}$$

- (b) Teste ao nível de significância de 10% a hipótese de igualdade dos valores esperados das (3.0)

quilometragens efetuadas por litro de combustível em automóveis dos modelos 1 e 2.

- **V.a. de interesse**

X_i = quilometragens efetuadas por litro de combustível em automóveis do modelo i , $i = 1, 2$

- **Situação**

$X_1 \sim \text{Normal}(\mu_1, \sigma_1^2) \perp\!\!\!\perp X_2 \sim \text{Normal}(\mu_2, \sigma_2^2)$

$(\mu_1 - \mu_2)$ DESCONHECIDO

σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidos, no entanto, assume-se que são IGUAIS: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$n_1 = 8 \leq 30$ ou $n_1 = 9 \leq 30$

- **Hipóteses**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$

- **Nível de significância**

$\alpha_0 = 10\%$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim_{H_0} t_{(n_1+n_2-2)}$$

dado que se pretende efectuar um teste sobre a diferença de valores esperados de duas populações normais independentes, com variâncias desconhecidas mas que se assume serem iguais.

- **Região de rejeição de H_0** (para valores da estatística de teste)

Estamos a lidar com um teste bilateral ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$), logo a região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste) é $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, onde $c : P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0) = \alpha_0$, i.e.,

$$\begin{aligned} c &: P(T \in W | H_0) = \alpha_0 \\ &2 \times \left[1 - F_{t_{(n_1+n_2-2)}}(c) \right] = \alpha_0 \\ c &= F_{t_{(n_1+n_2-2)}}^{-1}(1 - \alpha_0/2) \\ c &= F_{t_{(15)}}^{-1}(0.95) \\ c &\stackrel{\text{tabela/ calc.}}{=} 1.753. \end{aligned}$$

- **Decisão**

Atendendo a que

- $n_1 = 8$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = \frac{194.7}{8} = 24.3375$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 \right) - n_1 (\bar{x}_1)^2 \right] = \frac{1}{8-1} (4743.69 - 8 \times 24.3375^2) = \frac{5.17875}{7} = 0.7398$$

- $n_2 = 9$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = \frac{280.9}{9} = 31.2(1)$$

$$s_2^2 \stackrel{a}{=} 23.406(1),$$

o valor observado da estatística de teste é igual a

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \\ &= \frac{(24.3375 - 31.2(1)) - 0}{\sqrt{\frac{(8-1) \times 0.7398 + (9-1) \times 23.406(1)}{8+9-2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)}} \\ &\approx -3.9491. \end{aligned}$$

Como $t \approx -3.9491 \in W = (-\infty, -1.753) \cup (1.753, +\infty)$, devemos rejeitar H_0 ao n.s. $\alpha_0 = 10\%$ [ou a qualquer n.s. superior a $\alpha_0 = 10\%$].

1. Numa dada eleição para a Presidência da República concorrem 3 candidatos: A , B e C . Suponha que dos 2000 eleitores inquiridos numa sondagem aleatória: 1000 são apoiantes do candidato A , 600 preferem o candidato B e 400 preferem o candidato C . (4.0)

Vários analistas sustentam que, entre os eleitores, a base de apoio do candidato A é dupla da base de apoio do candidato B e tripla da base de apoio do candidato C . Averigúe, aplicando um teste apropriado, se a opinião dos analistas é consistente com os resultados da sondagem. Decida com base no valor- p .

• **V.a. de interesse e f.p.**

X = candidato apoiado pelo leitor inquirido

$$p_i = \begin{cases} P(X = i), & i = A, B, C \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

• **Hipóteses**

$H_0 : p_i = p_i^0$ ($i = A, B, C$) onde

$$\begin{cases} p_A^0 = 2p_B^0 = 3p_C^0 \\ p_A^0 + \frac{p_A^0}{2} + \frac{p_A^0}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{(6+3+2)p_A^0}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_A^0 = \frac{6}{11} \\ p_B^0 = \frac{3}{11} \\ p_C^0 = \frac{2}{11} \end{cases}$$

$H_1 : p_i \neq p_i^0$, para algum i

• **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=A,B,C} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi_{(k-\beta-1)}^2,$$

onde:

k = No. de classes = 3 (candidatos)

O_i = Frequência absoluta observável da classe i

E_i = Frequência absoluta esperada, sob H_0 , da classe i

β = No. de parâmetros a estimar = 0 [dado que a distribuição conjecturada em H_0 está completamente especificada, i.e., H_0 é uma hipótese simples.]

• **Região de rejeição de H_0** (para valores de T)

Ao efectuarmos um teste de ajustamento do qui-quadrado a região de rejeição de H_0 é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$.

• **Cálculo das frequências absolutas esperadas sob H_0**

As frequências absolutas esperadas sob H_0 são dadas por $E_i = n \times p_i^0$ ($i = A, B, C$) e iguais a

$$E_A = (1000 + 600 + 400) \times \frac{6}{11} = 1090. (90)$$

$$E_B = 2000 \times \frac{3}{11} = 545. (45)$$

$$E_C = 2000 \times \frac{2}{11} = 363. (63).$$

[Importa notar que não é necessário fazer qualquer agrupamento de classes uma vez que em pelo menos 80% das classes se verifica $E_i \geq 5$ e $E_i \geq 1$ para todo o i .]

• **Decisão (com base no valor- p)**

No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar:

i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$
A	1000	1090.(90)	$\frac{[1000 - 1090.(90)]^2}{1090.(90)} = 7.(57)$
B	600	545.(45)	$\frac{[600 - 545.(45)]^2}{545.(45)} = 5.(45)$
C	400	363.(63)	$\frac{[400 - 363.(63)]^2}{363.(63)} = 3.(63)$
$\sum_{i=A,B,C} o_i = n = 2000$ $\sum_{i=A,B,C} E_i = n = 2000$			$t = \sum_{i=A,B,C} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} = 16.(6)$

Assim, temos

$$t = \sum_{i=A,B,C} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} = 16.(6).$$

Uma vez que a região de rejeição de H_0 é para este teste um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} \text{valor} - p &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P[T > 16.(6) \mid H_0] \\ &\approx 1 - F_{\chi^2_{(3-1-0)}} [16.(6)] \\ &\stackrel{\text{calc.}}{\approx} 0.00024. \end{aligned}$$

Consequentemente, é suposto:

- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 0.024\%$;
- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > 0.024\%$, pelo que a opinião dos analistas não é consistente com os dados a qualquer dos níveis usuais de significância (1%, 5% e 10%).

[Em alternativa, poderíamos recorrer às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado com 2 graus de liberdade e adiantar um intervalo para o p -value:

$$\begin{aligned} F_{\chi^2_{(2)}}^{-1}(0.9995) = 15.20 &< t = 16.(6) \\ 0.9995 &< F_{\chi^2_{(2)}} [16.(6)] \\ 1 - F_{\chi^2_{(2)}} [16.(6)] &< 1 - 0.9995 \\ \text{valor} - p &< 0.0005. \end{aligned}$$

Logo o intervalo para o $\text{valor} - p$ é (0, 0.0005) e devemos:

- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq 0.05\%$, pelo que a opinião dos analistas não é consistente com os dados a qualquer dos níveis usuais de significância (1%, 5% e 10%).]

2. Para descrever a relação existente entre o volume de uma massa de um gás ideal clássico e a respetiva pressão, registaram-se 10 valores do logaritmo de base 10 do volume, x (com o volume medido em polegadas ao quadrado), e os correspondentes valores experimentais do logaritmo de base 10 da pressão, Y (com a pressão medida em psi). Pretendendo avaliar-se a validade do modelo de regressão linear simples para descrever a relação existente entre o logaritmo da pressão do gás e o logaritmo do seu volume, efetuaram-se os seguintes cálculos:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 19.4, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 38.06, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 14.8, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22.76, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28.12$$

- (a) Obtenha as estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros da recta de regressão linear simples de Y em x e interprete o significado do sinal da estimativa do parâmetro β_1 do modelo. (2.0)

• **Estimativas de β_0 e β_1**

Dado que

◦ $n = 10$

◦ $\sum_{i=1}^n x_i = 19.4$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{19.4}{10} = 1.94$$

$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 38.06$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 = 38.06 - 10 \times 1.94^2 = 0.424$$

◦ $\sum_{i=1}^n y_i = 14.8$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{14.8}{10} = 1.48$$

$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 22.76$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2 = 22.76 - 10 \times 1.48^2 = 0.856$$

◦ $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 28.12$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 28.12 - 10 \times 1.94 \times 1.48 = -0.592,$$

as estimativas de β_1 e β_0 são, para este modelo de RLS, iguais a:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2} \\ &= \frac{-0.592}{0.424} \\ &\approx -1.396226 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \times \bar{x} \\ &\approx 1.48 - (-1.396226) \times 1.94 \\ &= 4.188678 \end{aligned}$$

• **Interpretação do sinal da estimativa de β_1**

$\hat{\beta}_1 \approx -1.396226$

Como o sinal de $\hat{\beta}_1$ é negativo, espera-se que um aumento no logaritmo de base 10 do volume do gás provoque uma DIMINUIÇÃO no valor esperado do logaritmo de base 10 da pressão.

- (b) Indicando as hipóteses de trabalho convenientes, obtenha um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro β_1 do modelo de regressão linear simples de Y em x . O que pode concluir sobre a significância do modelo de regressão ao nível de significância de 5%? (4.0)

• **Hipóteses de trabalho**

$\epsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Normal}(0, \sigma^2), i = 1, \dots, n$

β_0, β_1 e σ^2 DESCONHECIDOS

• **Obtenção do IC para β_1**

Passo 1 — Selecção da v.a. fulcral para β_1

$$Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \sim t_{(n-2)}$$

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

Neste caso $n = 10$ e $(1 - \alpha) \times 100\% = 95\%$, logo usaremos os quantis de probabilidade

$$(a_\alpha, b_\alpha) : \begin{cases} P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha \\ P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \alpha/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\alpha = -F_{t_{(n-2)}}^{-1}(1 - \alpha/2) = -F_{t_{(8)}}^{-1}(0.975) \stackrel{\text{tabela/calcul.}}{=} -2.306 \\ b_\alpha = F_{t_{(n-2)}}^{-1}(1 - \alpha/2) = F_{t_{(8)}}^{-1}(0.975) \stackrel{\text{tabela/calcul.}}{=} 2.306. \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha$$

...

$$P\left[\hat{\beta}_1 - F_{t(n-2)}^{-1}(1 - \alpha/2) \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + F_{t(n-2)}^{-1}(1 - \alpha/2) \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}}\right] = 1 - \alpha.$$

Passo 4 — Concretização

Atente-se que

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2} \left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \right) - (\hat{\beta}_1)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{10-2} [0.856 - (-1.396226)^2 \times 0.424] \\ &= 0.003679\end{aligned}$$

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\beta_1) = \left[\hat{\beta}_1 \pm F_{t(n-2)}^{-1}(1 - \alpha/2) \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}} \right].$$

Logo

$$\begin{aligned}IC_{95\%}(\beta_1) &\simeq \left[-1.396226 \pm 2.306 \times \sqrt{\frac{0.003679}{0.424}} \right] \\ &\simeq [-1.396226 \pm 0.214812] \\ &= [-1.611038, -1.181414].\end{aligned}$$

- **Teste de significância do modelo de RLS**

Hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$$

N.s.

$$\alpha_0 = 0.05$$

Decisão

Invocando a relação entre intervalos de confiança e testes de hipóteses, podemos adiantar que:

- o valor conjecturado para β_1 em H_0 é

$$\beta_{1,0} = 0$$

$$\notin IC_{95\%}(\beta_1) = [-1.611038, -1.181414];$$

- assim sendo, a hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$ deve ser rejeitada ao nível de significância $\alpha = 5\%$ [ou a qualquer n.s. $\alpha_0 > 5\%$].