

**Probabilidades e Estatística**

LEMat, LMAC, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ

1º semestre – 2011/2012

1º Teste

12/11/2011 – 8:30

Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I**2.5 + 2.0 + 3.0 + 2.5 = 10.0** valores**Exercício 1**(a) • **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A = \text{chip produzido pela máquina } A$	$P(A) = 0.25$
$B = \text{chip produzido pela máquina } B$	$P(B) = 0.35$
$C = \text{chip produzido pela máquina } C$	$P(C) = 0.40$
$D = \text{chip ser defeituoso}$	$P(D) = ?$
$D A = \text{chip ser defeituoso dado que foi produzido pela máquina } A$	$P(D A) = 0.05$
$D B = \text{chip ser defeituoso dado que foi produzido pela máquina } B$	$P(D B) = 0.04$
$D C = \text{chip ser defeituoso dado que foi produzido pela máquina } C$	$P(D C) = 0.02$

• **Prob. pedida**

Aplicando o teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned}P(A|\bar{D}) &= \frac{P(\bar{D}|A) \times P(A)}{P(\bar{D})} \\ &= \frac{[1 - P(D|A)] \times P(A)}{1 - P(D)} \\ &= \frac{[1 - P(D|A)] \times P(A)}{1 - [P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)]} \\ &= \frac{(1 - 0.05) \times 0.25}{1 - (0.05 \times 0.25 + 0.04 \times 0.35 + 0.02 \times 0.40)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.25}{1 - 0.0345} \\ &\simeq 0.245986.\end{aligned}$$

(b) • **Averiguação da independência entre os eventos A e D**

Para já, recorde-se que

$$A \perp\!\!\!\perp D \Leftrightarrow P(A \cap D) = P(A) \times P(D).$$

Ora,

$$\begin{aligned}P(A \cap D) &= P(D|A) \times P(A) \\ &= 0.05 \times 0.25 \\ &= 0.0125 \\ &\neq P(A) \times P(D) \\ &= 0.25 \times 0.0345 \\ &= 0.008625.\end{aligned}$$

Assim conclui-se que os eventos A e D são **DEPENDENTES** (i.e., $A \not\perp\!\!\!\perp D$).

- **Resolução alternativa**

É sabido que

$$A \perp\!\!\!\perp D \Rightarrow P(D|A) = P(D),$$

ou seja,

$$P(D|A) \neq P(D) \Rightarrow A \not\perp\!\!\!\perp D.$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(D|A) &= 0.05 \\ &\neq P(D) \\ &= 0.0345, \end{aligned}$$

concluindo-se que A e D são eventos DEPENDENTES (i.e., $A \not\perp\!\!\!\perp D$).

Exercício 2

(a) • **V.a.**

X = número de transformadores que falham nos primeiros 10 anos de operação, em 20 transformadores que operam de modo independente

- **Distribuição de X**

Ao lidarmos com número de sucessos em 20 provas de Bernoulli i.i.d., segue-se

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

- **Parâmetros**

$$n = 20$$

$$p = P(\text{transformador falha nos primeiros 10 anos de operação}) = 0.05$$

- **Valor esperado de X**

$$E(X) = np = 20 \times 0.05 = 1$$

- **Desvio-padrão de X**

$$DP(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \times 0.05 \times (1-0.05)} = \sqrt{0.95} \simeq 0.974679.$$

(b) • **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 4) &= P(0 < X \leq 4) \\ &= F_{\text{Bin}(20,0.05)}(4) - F_{\text{Bin}(20,0.05)}(0) \\ &\stackrel{\text{tabela}}{=} 0.9974 - 0.3585 \\ &\simeq 0.6389. \end{aligned}$$

Grupo II

3.0 + 2.0 + 2.0 + 3.0 = 10.0 valores

Exercício 1

(a) • **V.a.**

Y

- **F.d.p. de Y**

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ ou } y > 2 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 < y \leq 2, \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
 P(0.5 < Y < 1.5) &= \int_{0.5}^{1.5} f_Y(y) dy \\
 &= \int_{0.5}^1 y dy + \int_1^{1.5} (2-y) dy \\
 &= \left. \frac{y^2}{2} \right|_{0.5}^1 + \left. \left(2y - \frac{y^2}{2} \right) \right|_1^{1.5} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{0.5^2}{2} \right) + \left[\left(2 \times 1.5 - \frac{1.5^2}{2} \right) - \left(2 \times 1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= 0.75.
 \end{aligned}$$

(b) • **V.a. e distribuição comum**

$$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, i = 1, 2$$

$$X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$$

- **Valor esperado e variância de X_i**

$$E(X_i) = E(X) \stackrel{\text{form}}{=} \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(X_i) = V(X) \stackrel{\text{form}}{=} \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

- **Nova v.a.**

$$Y = X_1 + X_2$$

- **Valor esperado e variância de Y**

$$E(Y) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \stackrel{X_i \sim X}{=} 2 \times E(X) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$V(Y) = V(X_1 + X_2) \stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} V(X_1) + V(X_2) \stackrel{X_i \sim X}{=} 2 \times V(X) = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida** (usando a distribuição normal)

$$\begin{aligned}
 P(0.5 < Y < 1.5) &= P \left[\frac{0.5 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{1.5 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \right] \\
 &\simeq \Phi \left(\frac{1.5 - 1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \right) - \Phi \left(\frac{0.5 - 1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \right) \\
 &= \Phi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) - \Phi \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \\
 &= \Phi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) - \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \right] \\
 &= 2 \times \Phi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) - 1 \\
 &\simeq 2 \times \Phi(1.22) - 1 \\
 &\stackrel{\text{tabela}}{=} 2 \times 0.8888 - 1 \\
 &= 0.7776
 \end{aligned}$$

- **Comentário**

Apesar de lidarmos com a soma de APENAS duas v.a., o valor exacto da probabilidade e o resultado aproximado, que obtemos considerando a distribuição de Y próxima da distribuição normal (TLC!), diferem pouco.

Com efeito, o (valor absoluto do) erro relativo é igual a

$$\frac{|0.7776 - 0.75|}{0.75} \times 100\% \simeq 3.68\%.$$

Exercício 2

- (a) • **Par aleatório**

(X, Y)

X = número de anos em que não ocorrem anomalias na cor

Y = número de anos em que não ocorrem anomalias na cor

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**

$P(X = x, Y = y)$, $P(X = x)$ e $P(Y = y)$ encontram-se na tabela seguinte:

X	Y		$P(X = x)$
	1	2	
1	0.4	0.1	0.5
2	0.1	0.4	0.5
$P(Y = y)$	0.5	0.5	1

- **V.a.**

$Y|X = 1$

- **F.p. de $Y|X = 1$**

$$\begin{aligned}
 P(Y = y|X = 1) &= \frac{P(X = 1, Y = y)}{P(X = 1)} \\
 &= \begin{cases} \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}, & y = 1 \\ \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}, & y = 2 \\ 0, & \text{restantes valores de } y \end{cases}
 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de $Y|X = 1$**

$$\begin{aligned}
 E(Y|X = 1) &= \sum_{y=1}^2 y \times P(Y = y|X = 1) \\
 &= 1 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{5} \\
 &= \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

- **2o. momento de $Y|X = 1$**

$$\begin{aligned}
 E(Y^2|X = 1) &= \sum_{y=1}^2 y^2 \times P(Y = y|X = 1) \\
 &= 1^2 \times \frac{4}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} \\
 &= \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

- **Variância de $Y|X = 1$**

$$\begin{aligned}
 V(Y|X = 1) &= E(Y^2|X = 1) - E^2(Y|X = 1) \\
 &= \frac{8}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \\
 &= \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

- (b) • **Correlação entre X e Y**

Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned}
 corr(X, Y) &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
 &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}
 \end{aligned}$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea anterior.

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^2 x \times P(X = x) \\ &= 1 \times 0.5 + 2 \times 0.5 \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de X^2**

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=1}^2 x^2 \times P(X = x) \\ &= 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.5 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

- **Variância de X**

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 2.5 - 1.5^2 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de Y**

Tendo em conta que $Y \sim X$,

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) \\ V(Y) &= V(X) \end{aligned}$$

- **Momento cruzado de X e Y de ordem $(1,1)$**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^2 xy \times P(X = x, Y = y) \\ &= 1 \times 1 \times 0.4 + 1 \times 2 \times 0.1 + 2 \times 1 \times 0.1 + 2 \times 2 \times 0.4 \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

- **Conclusão**

$$\begin{aligned} \text{corr}(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{2.4 - 1.5 \times 1.5}{\sqrt{0.25 \times 0.25}} \\ &= \frac{0.15}{0.25} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

- **Comentário**

Visto que $\text{corr}(X, Y) = 0.6 \neq 0$ pode concluir-se que X e Y estão correlacionadas, logo v.a. DEPENDENTES.

Para além disso, importa notar que $\text{corr}(X, Y) > 0$, pelo que as v.a. estão positivamente correlacionadas, pelo que apresentam tendência para variarem no mesmo sentido.

Estando o valor de $|\text{corr}(X, Y)|$ não muito próximo de 1, pode adiantar-se que as v.a. estão moderadamente correlacionadas.