0.1 $\psi-$Resolução

(Aqui está o exame na versão mais alargada)

1. Seja $\Omega =]0, 2b[^2$. Pretende-se encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais exista $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, solução não nula de

$$\begin{cases} \lambda u + \nabla \cdot (\phi \nabla u) = 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

quando $\phi(x, y) = x^m$.

a) Considere Ω_h um reticulado de Ω com $h_x = h_y = h$. Efectue uma discretização da equação diferencial num ponto $(x_i, y_j) \in \Omega_h$ usando diferenças finitas centradas.

Res:

$$\begin{aligned} \lambda u + \nabla \cdot (\phi \nabla u) &= \lambda u + \partial_x(x^m \partial_x u) + \partial_y(x^2 \partial_y u) = \\ &= \lambda u + m x^{m-1} \partial_x u + x^m \partial_x^2 u + x^m \partial_y^2 u = \lambda u + m x^{m-1} \partial_x u + x^m \Delta u \end{aligned}$$

e assim temos

$$\lambda u_{ij} + m x_i^{m-1} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + x_i^m \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} = 0.$$

b) Explicite um valor aproximado para λ quando se considera $h = b$.

Res:

$$\begin{aligned} \lambda u_{ij} + m x_i^{m-1} \frac{0-0}{2h} + x_i^m \frac{0 - 4u_{ij}}{h^2} &= \lambda u_{ij} + b^m \frac{-4u_{ij}}{b^2} = 0 \\ (\lambda - 4b^{m-2}) u_{ij} &= 0 \Rightarrow \lambda = 4b^{m-2}. \end{aligned}$$

c) Seja $b < \frac{1}{2}$. Mostre que, para $\lambda < -mh$, a diagonal do sistema discreto é estritamente dominante e conclua se há ou não soluções não nulas, para o problema discreto.

Res:

$$(\lambda - \frac{4}{h^2}) u_{ij} + \frac{1}{2h^2} x_i^{m-1} (mh + 2x_i) u_{i+1,j} + \frac{1}{2h^2} x_i^{m-1} (-mh + 2x_i) u_{i-1,j} + x_i^m \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0,$$

portanto torna-se necessário que

$$|\lambda - \frac{4}{h^2}| > \left(\frac{1}{2} x_i^{m-1} (|mh + 2x_i| + |mh - 2x_i|) + 2x_i^m \right) \frac{1}{h^2}$$

ou seja, como $\lambda < 0$,

$$|\lambda| + 4 > \frac{1}{2} x_i^{m-1} (|mh + 2x_i| + |mh - 2x_i|) + 2x_i^m.$$

Como $x_i \leq 2b$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_i^{m-1} (|mh + 2x_i| + |mh - 2x_i|) + 2x_i^m &\leq (2b)^{m-1}(4b + mh) + 2(2b)^m \\ &\leq (8b + hm)(2b)^{m-1} < 4 + |\lambda|, \end{aligned}$$

pois assumimos $2b < 1$ e também $hm < |\lambda|$.

d) Suponha que $\lambda = -1$ e que $0 < m < 10, h = \frac{1}{10}$, com $2b = 1$. Se começarmos com um $u_{ij}^{(0)} = 1$, aplicando o método G-S obtemos $u_{ij}^{(n)} \to 0$, quando $n \to \infty$? Justifique.

Res:

Neste caso, recuperando a estimativa anterior, precisamos que $(8b + hm)(2b)^{m-1} < 4 + |\lambda|$, ou seja, $(4 + hm) < 4 + |\lambda|$.

Como $hm < 1 = |-\lambda|$, fica provado que a diagonal é estritamente dominante.

Qualquer que seja a iterada inicial o método G-S converge para a solução única, que é zero.

2. Considere um elemento de referência que é um quadrilátero $\tilde{E} = \{(-1, 0), (1, 0), (2, 1), (-2, 1)\}$, representado na figura em baixo, onde estão representadas esquematicamente transformações F_k, de $\hat{E}$ em E_k, onde $E_1 = \hat{E}$,

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(-4, 3), (-2, 1), (2, 1), (-2, 5)\}, \\ E_3 &= \{(2, 3), (0, 5), (-2, 5), (2, 1)\}. \end{aligned}$$

Em $\hat{E}$ estão também representados 8 nós $\hat{z}_1, ..., \hat{z}_8$, em que 4 são os vértices e 4 os pontos médios nas arestas.

a) Explicite as transformações F_1, F_2 e F_3. *Sugestão:* Usar alguns pontos médios.

Res: $F_1 = I$. Basta pegar em três dos pontos e como a aplicação é afim, transforma pontos médios em pontos médios. Usamos os pontos do triângulo de referência, pois sabemos que sendo $F = Ax+b, F(0,0) = \mathbf{x}_1, F(0,1) = \mathbf{x}_3$ são os pontos médios das arestas paralelas, o $F(1,0) = \mathbf{x}_2$ é um dos vértices. Assim para E_2, tomamos $\mathbf{x}_1 = \frac{(-4,3)+(-2,1)}{2} = (-3,2), \mathbf{x}_2 = (-2,1), \mathbf{x}_3 = (0,3)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e confirmamos que

$$F_2(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

verificando que todos os pontos são transformados. De forma semelhante, para E_3 temos $\mathbf{x}_1 = (1,4)$, $\mathbf{x}_2 = (0,5), \mathbf{x}_3 = (0,3)$,e confirmamos que

$$F_3(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(*Nota:* Se considerássemos $\mathbf{x}_2 = (2,3)$, isso não corresponderia a E_3, pois não havia apenas rotação, havia também simetria, correspondente a multiplicar apenas a primeira linha por -1, ou seja, pela matriz de simetria$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

b) Considere que em $\hat{E}$ estão definidas as variáveis nodais $\hat{\nu}_k(\phi) = \phi(\hat{z}_k)$, que definem $\widehat{\mathcal{N}}$. Mostre que no elemento $\hat{E}$ a propriedade de unissolvência é verificada para o conjunto de polinómios

$$\mathcal{Q} = \{p_2(x,y) + b_1 x^2 y + b_2 x y^2 : p_2 \in \mathbf{P}_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\},$$

e defina os elementos finitos equivalentes afins a $(\hat{E}, \mathcal{Q}, \widehat{\mathcal{N}})$ em E_2 e E_3.

Res:

Seja $q(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + b_1 x^2 y + b_2 x y^2$.

Consideremos $q(z_i) = 0$, como em $[-1,1] \times \{0\}$, a restrição de q é um polinómio de segundo grau que será nulo em três pontos, ou seja,

$$q(x,0) = a_0 + a_1 x + a_4 x^2,$$

isso significa que $a_0 = a_1 = a_4 = 0$ e podemos escrever

$$q(x,y) = y(a_2 + a_3 x + a_5 y + b_1 x^2 + b_2 xy) = y\, \tilde{q}(x,y)$$

em $\tilde{q}$ é um polinómio de grau 2. Quando fazemos $y = 1$, temos também $q = \tilde{q}$ nulo em três pontos,

$$\tilde{q}(x,1) = a_2 + a_3 x + a_5 + b_1 x^2 + b_2 x$$

o que significa que $a_2 + a_5 = 0, a_3 + b_2 = 0, b_1 = 0$. Finalmente, tomamos $y = \frac{1}{2}$

$$\tilde{q}(x, \frac{1}{2}) = a_2 + a_3 x + a_5 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} b_2 x$$

um polinómio do primeiro grau nulo em dois pontos, logo $a_2 + \frac{1}{2} a_5 = 0, a_3 + \frac{1}{2} b_2 = 0$.

Juntando a informação, surge $a_2 = a_5 = 0$, e também $a_3 = b_2 = 0$. Todos os coeficientes são nulos, está mostrada a unissolvência.

O elemento finito equivalente afim de $(\hat{E}, \mathcal{Q}, \widehat{\mathcal{N}})$, em E_2 será $(E_2, \mathcal{Q}, \mathcal{N}_2)$, em que $\mathcal{N}_2$ é dado pelas 8 variáveis nodais

$$\nu_k(\phi) = \phi(F_2(\hat{z}_k)).$$

c) Explicite o sistema a resolver para encontrar a base dual de $\widehat{\mathcal{N}}$, e verifique se a função

$$\phi(x,y) = (x^2 - \frac{5}{2} y - 1)(y - 1), \text{ cujo gráfico é}$$

pertence a essa base dual.

Res:

O sistema resulta de resolver $\hat{\nu}_i(\hat{p}_j) = \delta_{ij}$, em que $\hat{p}_j$ serão os polinómios em $\mathcal{Q}$. Querendo escrevê-los na base canónica de $\mathcal{Q}$ basta inverter a matriz

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{9}{16} & -\frac{9}{16} & 2 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -2 & -\frac{5}{2} & -2 & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Os polinómios $\hat{p}_j$ serão assim obtidos pelo resultados da multiplicação de $(Q^{-1})^\top$ pelo vector da base canónica. Ou seja,

$$\hat{p} = (Q^{-1})^\top [1 \;\; x \;\; y \;\; xy \;\; x^2 \;\; y^2 \;\; x^2y \;\; xy^2]^\top,$$

podemos reparar que o polinómio dado pela sexta coluna é $\hat{p}_6(x,y) = 1 + \frac{3}{2}y - x^2 - \frac{5}{2}y^2 + x^2y = (x^2 - \frac{5}{2}y - 1)(y-1)$.

No entanto, para resolver o exercício não seria necessário inverter a matriz (!!), bastava verificar que $p_6(x,1) = 0$, o que anula os nós da aresta superior, que $p_6(x,0) = 1 - x^2$, o que significa que na aresta inferior é nulo nos vértices e vale 1 no ponto médio. Resta ver que é também nulo nos 2 pontos médios das arestas oblíquas, ou seja $p_6(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = p_6(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = 0$, o que se verifica. Concluímos assim que se trata do polinómio associado à variável nodal $\hat{\nu}_6(\phi) = \phi(\hat{z}_6)$, em que $\hat{z}_6$ é o ponto médio da aresta inferior.

3. Considere Ω o domínio cuja aderência é $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, (definidos no problema anterior).

Pretende-se encontrar u, solução de

$$\begin{cases} \lambda u - \nabla \cdot (\phi \nabla u) = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $\phi(x,y) = x^2 + y^2 + \mu$,para valores de $\lambda, \mu > 0$, e $f(x,y) = |y - \frac{1}{2}|$.

a) Escreva a formulação variacional associada a este problema, mostrando que a solução fraca é única em $H_0^1(\Omega)$ e indique qual o funcional de energia que ela minimiza nesse espaço.

Res: Consideramos $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \lambda uv - \int_\Omega \nabla \cdot (\phi \nabla u) v = \int_\Omega fv$$

e aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \lambda uv + \int_\Omega \phi \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv.$$

A forma bilinear será

$$b(u,v) = \int_\Omega \lambda uv + \int_\Omega \phi \nabla u \cdot \nabla v,$$

que está bem definida para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e temos a coercividade em $H_0^1(\Omega)$,

$$b(u,u) = \int_\Omega \lambda u^2 + \int_\Omega \phi |\nabla u|^2 \geq \int_\Omega \lambda u^2 + \inf_\Omega \phi \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \min\{\lambda, \mu\} ||u||_{1,\Omega}^2 \geq C_1 |u|_{1,\Omega}^2,$$

pela equivalência entre a norma e a seminorma em $H_0^1(\Omega)$. A continuidade surge de

$$\begin{aligned} |b(u,v)| &= |\int_\Omega \lambda uv + \int_\Omega \phi \nabla u \cdot \nabla v| \leq \lambda |\langle u, v \rangle_{L^2}| + M |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}| \\ &\leq \lambda ||u||_{0,\Omega} ||v||_{0,\Omega} + M |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \max\{\lambda, M\} ||u||_{1,\Omega} ||v||_{1,\Omega} \leq C_2 |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

onde $M = \max \phi = \mu + \max_{\mathbf{z}\in\Omega} |\mathbf{z}|^2$. Como a forma bilinear é simétrica, u minimiza o funcional em $H_0^1(\Omega)$,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda v^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv.$$

b) Mostre que a solução fraca é também uma solução forte, justificando que $f \in L^2(\Omega)$ e que $u \in H^2(\Omega)$,

Res:

Claramente, sendo f contínua, está em $L^2(\Omega)$ e o resultado de regularidade permite concluir que $u \in H^2(\Omega)$. Podemos mesmo reparar que f tem maior regularidade ($f \in H^1(\Omega)$), mas não podemos concluir que $f \in H^3(\Omega)$, porque Ω é poligonal.

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ a condição $u = 0$ na fronteira está verificada. Invertendo os passos, de

$$\int_\Omega \lambda uv + \int_\Omega \phi\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv,$$

obtemos porque $u \in H^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$, e os integrais existem,

$$\int_\Omega \lambda uv - \int_\Omega \nabla \cdot (\phi\nabla u)v = \int_\Omega fv.$$

Assim como $H_0^1(\Omega) \supset C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\lambda u - \nabla \cdot (\phi\nabla u) - f)v = 0, \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

e concluímos pelo Teorema.3.3.2 que $\lambda u - \nabla \cdot (\phi\nabla u) - f = 0$, a.e. Ω.

c) Suponha que era usada uma aproximação com elementos de Lagrange usando os polinómios $\mathcal{Q}$ do exercício anterior e que a priori $u \notin H^3(\Omega)$. Indique, justificando, qual o valor p que se pode obter para a estimativa de erro $||u - u_h||_{s,\Omega} = O(h^p)$ com $s = 0, 1$. Explicite o valor de h, para a triangulação $\bar{\Omega}_h = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Nessa triangulação quantas funções base havia a considerar, e a que nós estão associadas?

Res:

Sabemos que $\mathbf{P}_m \subset \mathcal{Q}$ para $m \leq 2$ e temos $u_h \in H^1(\Omega)$, porque u_h é a função interpoladora, que é contínua. Com efeito, na colagem dos elementos temos 3 nós nas arestas o que determina perfeitamente a restrição dos polinómios de $\mathcal{Q}$ à aresta, como polinómios de grau 2. Aplicando o Corolário.4.6.1, temos para $m = 0, 1, 2$

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq Ch^m|u|_{m+1,\Omega}.$$

Como a priori $u \notin H^3$, o resultado apenas faz sentido para $m = 1$, e temos

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}, \text{ ou } ||u - u_h||_{0,\Omega} \leq Ch^2|u|_{2,\Omega}.$$

– O valor de h é dado pelo maior diâmetro. Examinando a figura só haveria dúvida entre os valores

$$\begin{aligned} |(-4,3) - (2,1)| &= \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = 6.234 \\ |(-2,5) - (2,1)| &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 5.656 \end{aligned}$$

e portanto $h = 6.234$.

– Apenas há duas funções base a considerar, associadas aos nós definidos pelos dois pontos médios, das arestas $E_1 \cap E_2$ e $E_2 \cap E_3$, já que os outros nós estão sobre a fronteira, e portanto as componentes das funções base associadas seriam nulas.