Teste 1 - Análise Numérica Funcional e Optimização (MMA,PDEC)
Instituto Superior Técnico, 14 de Novembro de 2017, 15h15-16h45

1)$_{[1.5]}$ Seja $M \in \mathbb{R}$. Mostre que $||u||_M = \max_{x\in[a,b]} |e^{M(a-x)}u(x)|$ é uma norma equivalente a $||.||_\infty$ em $C[a,b]$.

2)$_{[5.0]}$ Seja $Z \in C^1(\mathbb{R})$ com $|Z'(x)| \leq Z_1$. Considere o operador $A : C[a,b] \to C[a,b]$ definido por

$$(Au)(x) = \int_a^x Z(u(t))dt.$$

a) Calcule a derivada de Fréchet de A.

b) Determine um majorante de $||A'_u||_{\mathcal{L}(E)}$ onde o espaço de Banach é:

(i) $E = C[a,b]$ com a norma do máximo;

(ii) $E = C[a,b]$ com a norma $||.||_M$ definida na questão 1), para $M > 0$.

c) Dada uma função $V \in C[a,b]$, e $c \in \mathbb{R}$, considere a iteração (u_n)

$$u_{n+1}(x) = V(x) + c\int_a^x Z(u_n(t))dt.$$

Determine quando u_n converge para um único $u \in C[a,b]$.

d) Com $u_0 \equiv 0$, apresente uma iteração do Método de Newton-Kantorovich, para resolver a equação de Volterra,

$$u(x) = \int_a^x \cos(u(t))dt.$$

3)$_{[2.0]}$ Para $p, q \in \mathbb{R}^N$, indique condições suficientes em $\alpha \in \mathbb{R}$, para que a equação vectorial

$$x - p = q\cos(\alpha||x-p||).$$

(i) tenha pelo menos uma solução, (ii) essa solução seja única.

4)$_{[1.5]}$ Considere $f(x) = |x|^m$, calcule $\mathcal{A}(v) = \langle v'', f\rangle$, $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Para $m \in \mathbb{R}$, em que casos $\mathcal{A}$ se identifica com uma função?

χ- **Resolução**

1. Basta ver que

$$||u||_M = \max_{x\in[a,b]} \left|e^{M(a-x)}u(x)\right| \begin{cases} \leq \max\{1, e^{M(a-b)}\} \max_{x\in[a,b]} |u(x)| = C_2||u||_\infty \\ \geq \min\{1, e^{M(a-b)}\} \max_{x\in[a,b]} |u(x)| = C_1||u||_\infty \end{cases}$$

2.a) Obtemos

$$A(u+h)(x) - A(u)(x) \quad = \quad \int_a^x Z(u(t)+h(t)) - Z(u(t))dt = \int_a^x Z'(u(t))h(t) + o(h(t))dt$$

Portanto, a parte linear é a derivada de Fréchet $A'_u(h) = \int_a^x Z'(u(t))h(t)dt$, já que a parte restante verifica

$$||A(u+h) - A(u) - A'_u(h)||_\infty \quad = \quad \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x h(t)o(1)dt\right| = (b-a)||h||_\infty o(1) = o(||h||_\infty).$$

2.b)
(i) Neste caso temos $||A'_u(h)||_\infty \leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^x |Z'(u(t))|\,|h(t)|dt \leq (b-a)Z_1||h||_\infty$,

$$||A'_u||_{\mathcal{L}(C[0,a])} \leq \sup_{h\neq 0} \frac{(b-a)Z_1||h||_\infty}{||h||_\infty} = (b-a)Z_1.$$

(ii) Sendo $M > 0$,

$$\begin{aligned} ||A'_u(h)||_M \quad &= \quad \max_{x\in[a,b]} \left|e^{M(a-x)} \int_a^x Z'(u(t))h(t)dt\right| \leq \max_{x\in[a,b]} e^{M(a-x)} \int_a^x |Z'(u(t))|e^{-M(a-t)}e^{M(a-t)}|h(t)|dt \\ &\leq \quad \max_{x\in[a,b]} e^{M(a-x)} \int_a^x Z_1 e^{M(t-a)}||h||_M dt = \max_{x\in[a,b]} e^{-M(x-a)}|e^{M(x-a)} - 1|/M \ Z_1||h||_M \\ &\leq \quad |1 - e^{-M(b-a)}|/M \ Z_1||h||_M \leq Z_1||h||_M/M \qquad \text{(pois } M > 0) \end{aligned}$$

notando que $\int_a^x e^{M(t-a)}dt = \frac{1}{M}[e^{M(x-a)} - 1]$. Portanto

$$||A'_u||_{\mathcal{L}(E)} \leq \sup_{h\neq 0} \frac{Z_1/M \ ||h||_M}{||h||_M} = Z_1/M.$$

2.c) Agora temos$u_{n+1} = V + cAu_n = G(u_n)$, pelo método do ponto fixo, definindo

$$G(u) = V + cA(u).$$

É imediato que $G'_u = cA'_u$ pois V não depende de u. Portanto, usando (ii) anterior

$$||G'_u||_{\mathcal{L}(C[0,a])} = |c| \ ||A'_u||_{\mathcal{L}(E)} \leq |c|\frac{Z_1}{M} = L < 1$$

desde que escolhemos $M > |c|Z_1$, obtemos uma contracção em todo o espaço $E = C[a,b]$ com a norma definida na questão 1.

Sendo G contractiva e invariante em E fechado não vazio, aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, para concluir a existência e unicidade de $u = G(u)$, e a convergência do método do ponto fixo, qualquer que seja u_0 inicial.

Obs: O uso da norma $||.||_M$ permite melhorar muito o resultado, caso contrário, usando apenas a norma do máximo, teríamos que exigir $|c|Z_1|b-a| < 1$.

2.d) O problema linear para o Método de Newton aplicado a $F(u) = u - A(u) = 0$, com $F'_u(h) = h - A'_u(h)$, seria

$$h(x) - \int_a^x Z'(u_0(t))h(t)dt = \int_a^x Z(u_0(t))dt - u_0(x)$$

logo $h(x) + \int_a^x \sin(0)h(t)dt = \int_a^x cos(0)dt - 0 = x - a$, ou seja $u_1(x) = u_0(x) + h(x) = x - a$.

3. Considere $G(y) = p + q\cos(\alpha||y - p||)$, que é contínua para $y \in \mathbb{R}^N$, e a equação é $x = G(x)$.

Como $||G(y) - p|| = ||q||\ |\cos(\alpha||y - p||)| \leq ||q||$, para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$, então $G(y) \in \bar{B}(p, ||q||) = X$, uma bola fechada onde é invariante pois $G(X) \subseteq X$.

(i) Pelo T. Brouwer, sendo o espaço de dimensão finita, tem solução para qualquer α.

(ii) Para ser única, verificamos a contractividade, usando a derivada de Fréchet que é aqui a matriz jacobiana, e como

$$\nabla G(x)h = q\nabla\cos(\alpha||x - p||) \cdot h = -\alpha q \sin(\alpha||x - p||)\frac{x - p}{||x - p||} \cdot h$$

basta exigir que seja contractiva na norma induzida (pela norma euclidiana),

$$||\nabla G(x)|| = \sup_{h \neq 0} \frac{||\nabla G(x)h||}{||h||} \leq |\alpha| \sup_{h \neq 0} ||q||\ |\sin(\alpha||x - p||)|\ \frac{||x - p||}{||x - p||} \cdot \frac{||h||}{||h||} \leq |\alpha|\ ||q||,$$

ou seja, quando $|\alpha|\ ||q|| < 1$.

4) Pelo cálculo formal, obtemos $(|x|^m)'' = (m\,\mathrm{sign}(x)\,|x|^{m-1})' = 2\delta m|x|^{m-1} + m(m-1)|x|^{m-2}$, quando $m \neq 0, 1$.

Quando $m = 1$, temos $(|x|^m)'' = 2\delta$, e trivialmente é nulo se $m = 0$.

O termo $2\delta m|x|^{m-1}$ é nulo se $m > 1$, e não está definido se $m < 1$ (pois $|x|^{m-1} = \infty$ se $x = 0$).

Portanto, se $m > 1$ identificamos $\mathcal{A}$ à função $m(m-1)|x|^{m-2}$, tendo

$$\mathcal{A}(v) = \langle v'', f\rangle = m(m-1)\int_{\mathbb{R}} |x|^{m-2}v(x)dx,\ \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

e no caso $m = 1$, $\mathcal{A}(v) = \langle v, f''\rangle = \langle v, 2\delta\rangle = 2v(0)$, não é função.

Obs: Note-se ainda que se $m < 1$, $\int_{\mathbb{R}} |x|^{m-2}v(x)dx$ não está definido perto de zero, pois mesmo que $v = 1$ em $[-a, a]$, temos $\int_{-a}^a |x|^{m-2}dx = \infty$.