Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**
Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

2^o Teste de Análise Numérica de Equações Diferenciais Parciais
2 de Junho de 2008 (14h40–16h00)

1. Seja $\Omega =]0,1[\times]1,2[$ e considere o problema de Dirichlet homogéneo para a EDP

$$\alpha^2 u(x) - 2x_1 \partial_{x_1} u(x) - 2x_2 \partial_{x_2} u(x) - |x|^2 \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

em que $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ e em que $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

a)$_{[4.0]}$ Relacione a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1) com a solução variacional de

$$\int_\Omega (|x|^2 \nabla u \cdot \nabla v + (\alpha^2 u - f)v)dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

e comente acerca da existência e unicidade.

b)$_{[4.0]}$ Para aproximar a solução $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema variacional anterior foi considerada uma divisão do domínio Ω em 2 triângulos rectângulos pela diagonal $x_2 = 2 - x_1$. Apresente a expressão da função interpoladora $\Pi_{\Omega_h} u$ usando elementos de Lagrange[1] de grau 3, em termos das variáveis nodais e funções e forma, calculando pelo menos 2 das funções de base internas.

c)$_{[3.0]}$ Para teste do método foram considerada funções

$$U(x) = \sin(ax_1)\sin(ax_2).$$

Indique valores $a \in \mathbb{R}$ e as funções f, tais que U seja a solução de (2).

d)$_{[3.0]}$ Considere uma triangulação regular com $h_E < h$, e sendo U_h a aproximação de U, solução do problema variacional discreto com elementos de Lagrange de grau 3, indique e justifique o valor de p na ordem de convergência

$$||U - U_h||_{H^s(\Omega)} = O(h^p),$$

em termos de $s \in \mathbb{N}_0$.

2. Considere $\hat{E}$ o triângulo de referência $\{(0,0\}, \{1,0\}, \{0,1\}\}$ e E o triângulo definido pelos vértices $\{(0,0\}, \{1,1\}, \{3,0\}\}$. Em $\hat{E}$ considere as variáveis nodais definidas por $\hat{\nu}_k(\hat{f}) = \hat{f}(\hat{z}_k)$, com

$$\hat{z}_1 = (1/2, 0), \hat{z}_2 = (0, 1/2), \hat{z}_3 = (1/2, 1/2).$$

a)$_{[3.0]}$ Determine as funções de forma $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{P}_1$, duais dessas variáveis nodais $\hat{\nu}_k$. Usando uma transformação afim, apresente para E as funções de forma φ_k interpolacionalmente equivalentes.

b)$_{[3.0]}$ Verifique se existe $\hat{w} > 0$ na regra de quadratura

$$\hat{Q}(f) = \hat{w}\left(\hat{f}(\hat{z}_1) + \hat{f}(\hat{z}_2) + \hat{f}(\hat{z}_3)\right)$$

de forma a que seja exacta para as funções de forma $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{P}_1$. Apresente a correspondente regra de quadratura $Q_E(f) = w\,(f(z_1) + f(z_2) + f(z_3))$, para o elemento E.

[1]Considere os elementos de Lagrange de grau 3, definidos no triângulo de referência pelos 10 nós:

$$\{(0,0), (\frac{1}{3}, 0), (\frac{2}{3}, 0), (1,0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0,1), (0, \frac{2}{3}), (0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$$

Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**
Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

2^o Teste de Análise Numérica de Equações Diferenciais Parciais (English Version)
2 de Junho de 2008 (14h40–16h00)

1. Let $\Omega =]0,1[\times]1,2[$ and consider the homogeneous Dirichlet problem for the PDE

$$\alpha^2 u(x) - 2x_1 \partial_{x_1} u(x) - 2x_2 \partial_{x_2} u(x) - |x|^2 \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad ((1))$$

where $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$, with $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

a)$_{[4.0]}$ Relate the weak solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of (1) to the variational solution of

$$\int_\Omega (|x|^2 \nabla u \cdot \nabla v + (\alpha^2 u - f)v)dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad ((2))$$

and comment on the existence and uniqueness.

b)$_{[4.0]}$ To approximate the solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of the variational problem it was considered a division of Ω in two triangles using the diagonal $x_2 = 2 - x_1$. Present the expression of the global interpolation function $\Pi_{\Omega_h} u$ using Lagrange finite elements of third degree[2], in terms of the nodal variables, and shape functions, calculating at least 2 of the internal basis functions.

c)$_{[3.0]}$ To test the method the functions

$$U(x) = \sin(ax_1)\sin(ax_2).$$

were considered. Present values $a \in \mathbb{R}$ and functions f, such that U is a solution of (2).

d)$_{[3.0]}$ Consider a regular mesh with $h_E < h$, and let U_h be the approximation of U, solution of the discrete variational problem using 3rd degree Lagrange finite elements. Present and justify the values of p in the order of convergence

$$||U - U_h||_{H^s(\Omega)} = O(h^p),$$

in terms of $s \in \mathbb{N}_0$.

2. Consider $\hat{E}$ the reference triangle $\{\{0,0\},\{1,0\},\{0,1\}\}$ and E the triangle defined by the vertex $\{\{0,0\},\{1,1\},\{3,0\}\}$. In $\hat{E}$ consider the nodal variables defined by $\hat{\nu}_k(\hat{f}) = \hat{f}(\hat{z}_k)$, with

$$\hat{z}_1 = (1/2, 0), \hat{z}_2 = (0, 1/2), \hat{z}_3 = (1/2, 1/2).$$

a)$_{[3.0]}$ Determine the shape functions $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{P}_1$, dual of the nodal variables $\hat{\nu}_k$. Using an affine transformation present for E the shape functions φ_k that are interpolational equivalent.

b)$_{[3.0]}$ Verify if there exists $\hat{w} > 0$ in the quadrature rule

$$\hat{Q}(f) = \hat{w}\left(\hat{f}(\hat{z}_1) + \hat{f}(\hat{z}_2) + \hat{f}(\hat{z}_3)\right)$$

such that it is exact for the shape functions $\hat{\varphi}_k \in \mathbb{P}_1$. Present the correspondent quadrature rule $Q_E(f) = w\,(f(z_1) + f(z_2) + f(z_3))$, for the element E.

[2]Consider Lagrange elements of third degree, defined on the reference triangle by the 10 nodes:

$$\{(0,0), (\frac{1}{3},0), (\frac{2}{3},0), (1,0), (\frac{1}{3},\frac{2}{3}), (\frac{2}{3},\frac{1}{3}), (0,1), (0,\frac{2}{3}), (0,\frac{1}{3}), (\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$$

$\psi-$**Resolução:**

1a) Multiplicando (1) por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega \alpha^2 uvdx - \int_\Omega (2x_1\partial_{x_1}u + 2x_2\partial_{x_2}u + |x|^2 \Delta u)vdx = \int_\Omega fvdx. \qquad (*)$$

Por outro lado, temos

$$\nabla \cdot (|x|^2 \nabla u) = \nabla |x|^2 \cdot \nabla u + |x|^2 \Delta u = 2x_1\partial_1 u + 2x_2\partial_2 u + |x|^2 \Delta u,$$

e substituindo em (*) ficamos com

$$\int_\Omega \alpha^2 uvdx - \int_\Omega \nabla \cdot (|x|^2 \nabla u)vdx = \int_\Omega fvdx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$ pela F. Green resulta: $-\int_\Omega \nabla \cdot (|x|^2 \nabla u)v = \int_\Omega |x|^2 (\nabla u \cdot \nabla v)$, e substituindo obtemos (2).

Temos assim, $b(u,v) = l(v)$ com

$$b(u,v) = \int_\Omega \alpha^2 uvdx + \int_\Omega |x|^2 (\nabla u \cdot \nabla v)dx; \quad l(v) = \int_\Omega fvdx$$

em que b é bilinear e contínua em $H_0^1(\Omega)$: provando[3] com a norma de H^1

$$|b(u,v)| \leq \alpha^2 ||u||_{L^2} ||v||_{L^2} + \max_{x\in\Omega} |x|^2 ||\nabla u||_{L^2} ||\nabla v||_{L^2} \leq (\alpha^2 + 5) ||u||_{H^1} ||v||_{H^1},$$

e também é coerciva[4]

$$b(u,u) = \int_\Omega \alpha^2 u^2 + \int_\Omega |x|^2 |\nabla u|^2 \geq \alpha^2 \int_\Omega u^2 + \min_{x\in\Omega} |x|^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \min\{\alpha^2, 1\} ||u||^2_{H^1}.$$

Por outro lado, como $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, temos l forma linear em H^{-1}. Pelo Teorema de Lax Milgram existe e é única a solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

– Reciprocamente, verificando-se (2), obtemos (*) para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em particular para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, logo (1) é verificado no sentido das distribuições, e $u \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca. Para além disso, como $f \in L^2(\Omega)$, pelo teorema de regularidade, $u \in H^2(\Omega)$ (notando que Ω é um polígono convexo), e a solução é mesmo forte.

1b) As funções base internas estão definidas para os 2 nós internos $\mathbf{z}_1 = (1/3, 4/3), \mathbf{z}_2 = (2/3, 5/3)$, e para os nós comuns na diagonal $\mathbf{z}_3 = (1/3, 5/3), \mathbf{z}_4 = (5/3, 1/3)$.

– Para $\mathbf{z}_1 = (1/3, 4/3)$, a função de forma $\mathbb{P}_3$ será nula em $x_1, x_2 - 1$, e na diagonal $2 - x_1 - x_2 = 0$. Logo

$$\psi_1(x) = C_1 x_1(x_2 - 1)(2 - x_1 - x_2),$$

faltando determinar C_1, que por $\psi_1(1/3, 4/3) = 1$ resulta $C_1\frac{1}{3}(\frac{4}{3} - 1)(2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}) = 1 \Rightarrow C_1 = 27$.

– Para $\mathbf{z}_2 = (2/3, 5/3)$, de forma semelhante,

$$\psi_2(x) = C_2(x_1 - 1)(x_2 - 2)(2 - x_1 - x_2),$$

e $\psi_2(2/3, 5/3) = 1 \implies C_2(\frac{2}{3} - 1)(\frac{5}{3} - 2)(2 - \frac{2}{3} - \frac{5}{3}) = 1 \Rightarrow C_2 = -27$.

– Para $\mathbf{z}_3 = (1/3, 5/3)$, há duas partes. No triângulo E_1 (inferior), a função de forma é

$$\varphi_{E_1,3}(x) = C_{3,1} x_1(x_2 - 1)(x_2 - 4/3),$$

e $\varphi_{E_1,3}(1/3, 5/3) = 1 \implies C_{3,1}\frac{1}{3}(\frac{5}{3} - 1)(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) = 1 \Rightarrow C_{3,1} = 27/2$. Em E_2 temos

$$\varphi_{E_2,3}(x) = C_{3,2}(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_1 - 2/3),$$

e $\varphi_{E_2,3}(1/3, 5/3) = 1 \implies C_{3,2}(\frac{1}{3} - 1)(\frac{5}{3} - 2)(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow C_{3,2} = -27/2$.

Portanto $\psi_3(x) = \begin{cases} \frac{27}{2}x_1(x_2 - 1)(x_2 - 4/3), & x \in E_1 \\ \frac{-27}{2}(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_1 - 2/3), & x \in E_2 \end{cases}$

– Para $\mathbf{z}_4 = (2/3, 4/3)$ é semelhante, $\psi_4(x) = \begin{cases} \frac{27}{2}x_1(x_2 - 1)(x_2 - 1/3), & x \in E_1 \\ \frac{-27}{2}(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_1 - 5/3), & x \in E_2 \end{cases}$

[3] Também poderia ser feito com a seminorma, pois é norma em $H_0^1(\Omega)$.

[4] A razão de usar este $\bar{\Omega} = [0,1] \times [1,2]$ e não $[0,1]^2$... assim o mínimo de $|x|^2$ é 1, não nulo, e a coercividade sai facilmente. Se $\alpha = 0$ deveria usar-se a desigualdade de Poincaré (com a seminorma não seria preciso...).

Definidas as 4 funções base, a função interpoladora é

$$(\Pi_{\Omega_h} f)(x) = \sum_{k=1}^{4} f(\mathbf{z}_k)\psi_k(x)$$

.

1c) Para que $U = 0$ em $\partial\Omega$, basta exigir que $a = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, para $U(x) = \sin(n\pi x_1)\sin(n\pi x_2)$, temos $\partial_{x_1}U(x) = n\pi\cos(n\pi x_1)\sin(n\pi x_2), \partial_{x_2}U(x) = n\pi\sin(n\pi x_1)\cos(n\pi x_2)$ e ainda $\Delta U(x) = -2(n\pi)^2\sin(n\pi x_1)\sin(n\pi x_2)$, logo

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha^2 U - 2x_1\partial_{x_1}U - 2x_2\partial_{x_2}U - |x|^2\,\Delta U)(x) \\ &= (\alpha^2 + 2(n\pi)^2\,|x|^2)\sin(n\pi x_1)\sin(n\pi x_2) - 2n\pi(x_1\cos(n\pi x_1)\sin(n\pi x_2) + x_2\sin(n\pi x_1)\cos(n\pi x_2)) \end{aligned}$$

1d) Usando elementos de Lagrange de grau $m = 3$ temos a estimativa

$$||U - U_h||_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{m+1-s}|U|_{H^{m+1}(\Omega)} \qquad (m \leq 3)$$

Como a solução é dada[5], verificamos que $U \in C^\infty(\bar{\Omega}) \implies U \in H^4(\Omega)$ e $|U|_{H^4(\Omega)}$ é finito.

Conclui-se que $||U - U_h||_{H^s(\Omega)} = O(h^{4-s})$. Como $U_h \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, podemos estabelecer duas estimativas de convergência $||U - U_h||_{L^2(\Omega)} = O(h^4)$ e $||U - U_h||_{H^1(\Omega)} = O(h^3)$, para $s = 0$ e $s = 1$.

2a) Os coeficientes polinomiais $\hat{\varphi}(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ podem ser dados pela inversão da matriz[6], resolvendo $\hat{v}_i(\hat{\varphi}_j) = \delta_{ij}$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(1) & \nu_1(\#_1) & \nu_1(\#_2) \\ \nu_2(1) & \nu_2(\#_1) & \nu_2(\#_2) \\ \nu_3(1) & \nu_3(\#_1) & \nu_3(\#_2) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$\hat{\varphi}_1(x) = 1 - 2x_2, \hat{\varphi}_2(x) = 1 - 2x_1, \hat{\varphi}_3(x) = -1 + 2(x_1 + x_2),$$

A transformação afim é da forma $F(\hat{x}) = A\hat{x} + b$, fazendo $F(0,0) = (0,0)$ temos $b = (0,0)$ e basta que $F(1,0) = (3,0), F(0,1) = (1,1)$, ou seja

$$A(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que dá

$$A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $\varphi_k(x) = \hat{\varphi}_k(F^{-1}(x)) = \hat{\varphi}_k(A^{-1}x) = \hat{\varphi}_k((x_1 - x_2)/3, x_2)$.

2b) Sabemos que

$$\int_{\hat{E}} \hat{x}_1^n\hat{x}_2^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+2)!} \implies \int_{\hat{E}} 1 = \frac{1}{2}, \int_{\hat{E}} \hat{x}_1 = \int_{\hat{E}} \hat{x}_2 = \frac{1}{6}$$

Como regra de quadratura

$$\hat{Q}(f) = \hat{w}\left(\hat{f}(\frac{1}{2},0) + \hat{f}(0,\frac{1}{2}) + \hat{f}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)$$

para ser de grau 1, temos que verificar $\hat{Q}(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\hat{w} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{w} = \frac{1}{6}$, e agora

$$\hat{Q}(\#_1) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}, \quad \hat{Q}(\#_2) = \frac{1}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

No caso do elemento E temos $z_k = F(\hat{z}_k) \implies z_1 = (\frac{3}{2}, 0), z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), z_3 = (2, \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} \int_E f = \int_{\hat{E}} f(F(\hat{x}))\,|\det A|\,d\hat{x} &\approx \hat{w}\,|\det A|\left(f(\frac{3}{2},0) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(2,\frac{1}{2})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(\frac{3}{2},0) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(2,\frac{1}{2})\right) = Q(f). \end{aligned}$$

[5]Notar que se a solução não fosse dada, poderíamos garantir $U \in H^2(\Omega)$, pois o domínio é poligonal convexo. Sendo a solução dada podemos avaliar directamente a sua regularidade. Como $U \in C^\infty(\bar{\Omega})$ obtemos $U \in H^m(\Omega)$ para qualquer m.

[6]Aqui também poderíamos usar $\hat{\varphi}_1(x) = C_1(x_2 - 1/2) \implies \hat{\varphi}_1(0, \frac{1}{2}) = C_1(0 - 1/2) = 1 \implies C_1 = -2...$ etc.