

Instituto Superior Técnico. Departamento de Matemática.

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica.

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação (2003/04).

2º Exame de Análise Numérica II : 11 de Fevereiro de 2004, 17h00 (+2h30).

O exame está cotado de 0 a 14 (a nota mínima é 6).

1._[3.0] Obtenha uma aproximação racional para $\log(3)$ por dois processos diferentes:

(i) aplicando uma Regra de Simpson em $[1, 3]$ com 5 nós de quadratura.

(ii) usando um polinómio p_3 que interpole $\log(1), \log'(1), \log'(2), \log'(3)$.

Apresente uma estimativa de erro para esses valores.

2.

a)_[2.0] Calcule em $[0, \frac{\pi}{2}]$, o *spline natural* que interpola $f(x) = \sin(x)$ em $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

b)_[1.0] Calcule a Transformação de Fourier Discreta aplicada a um vector com componentes $v_k = e^{2\pi i \frac{k-1}{N}}$ com $k = 1, \dots, N$.

c)_[2.5] Seja $m \in \mathbb{N}$. Determine a melhor aproximação g_m para $f(x) = \alpha + \beta \sin(x)$ em $[-2m\pi, 2m\pi]$ usando funções da forma $g(x) = a + bx$, no sentido dos mínimos quadrados. Observe que quando $m \rightarrow \infty$, $g_m \rightarrow \alpha$, e verifique que $g_m = \alpha$ é a melhor aproximação *minimax* para qualquer $m \in \mathbb{N}$, usando o Teorema de Chebyshev.

3. Considere a equação diferencial $u' = \sin(\alpha u)$, com $u(0) = u_0$.

a)_[2.0] Determine um majorante para o erro de truncatura local do método,

$$u_{n+1} = u_n + h \sin(\alpha u_n) + \frac{\alpha h^2}{4} \sin(2\alpha u_n),$$

e conclua acerca da ordem de convergência.

b)_[1.0] Considere o método anterior para inicializar o método implícito

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (\sin(\alpha u_{n+1}) + \sin(\alpha u_n)),$$

formando um par predictor-corrector. Indique a ordem de convergência deste método, e mostre que há contractividade na função iteradora do método implícito se $|\alpha|h < 2$.

4.

a)_[1.0] Seja $I(f) = \int_a^b \int_a^b f(x, y) dx dy$, pretende-se um funcional $Q = \omega \delta_{(c_1, c_2)}$ tal que $I(\mathcal{P}_1) = Q(\mathcal{P}_1)$, ou seja, é exacto para polinómios de grau 1, $p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$.

b)_[1.5] Considere uma função injectiva $g \in C^4[a, b]$, com a e b pontos fixos. Mostre que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b g^{-1}(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(5(a+b) - 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{g^{(4)}(\xi)}{480} (b-a)^4 \right).$$

χ- Resolução

1._[3.0] **i)** Temos $\log(3) = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$. Aplicando a R. Simpson nos pontos $\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$ (logo $h = \frac{1}{2}$) e $\log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = I \approx Q = \frac{1/2}{3} (\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} + 4(\frac{1}{3/2} + \frac{1}{5/2})) = \frac{11}{10}$.

Assim $|E| = |I - Q| \leq \frac{2(1/2)^4}{180} \max_{x \in [1,3]} |(\frac{1}{x})^{(4)}| \leq \frac{1}{2^4 \times 90} \max_{x \in [1,3]} |\frac{24}{x^5}| \leq \frac{24}{2^4 \times 90} = \frac{1}{60}$.

ii) Calculamos as diferenças divididas de $f(x) = \log'(x) = \frac{1}{x}$ nos pontos $\{1, 2, 4\}$ o que nos dá $f[1, 2] = \frac{-1}{2}$, $f[2, 3] = \frac{-1}{6}$, $f[1, 2, 3] = \frac{1}{6}$. Usando a F. Newton, $p'_3(x) = 1 + \frac{-1}{2}(x-1) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$ e portanto $p_3(x) = C + x - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x)$. De $0 = p_3(1) = C + 1 + \frac{1}{6}(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2) = C + \frac{41}{36}$ obtemos $C = \frac{-41}{36}$ e $p_3(3) = -\frac{41}{36} + 3 - \frac{1}{4}(3-1)^2 + \frac{1}{6}(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2}3^2 + 2 \cdot 3) = \frac{10}{9}$. Como majoração de erro, $|\log(3) - \frac{10}{9}| \leq |\log(3) - \frac{11}{10}| + |\frac{11}{10} - \frac{10}{9}| \leq \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{1}{36}$.

2. a)_[2.0] Considerando os pontos $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$, como $\sigma_0 = \sigma_2 = 0$, basta calcular σ_1 , que verifica $\frac{\pi}{3}\sigma_1 = \sin[x_2, x_1] - \sin[x_1, x_0] = \frac{0-1}{\pi/2} - \frac{1-0}{\pi/2}$, logo $\sigma_1 = \frac{3}{\pi}(\frac{-4}{\pi})$.

Portanto, em $[0, \frac{\pi}{2}]$, obtemos $s_0(x) = \frac{-12}{\pi^2} \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6} + (\frac{2}{\pi} + \frac{12}{\pi^2} \frac{\pi}{12})x + 0 = -4(\frac{x}{\pi})^3 + 3\frac{x}{\pi}$.

2. b)_[1.0] $\mathcal{F}\mathbf{v} = \mathbf{W}^*\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v} = \mathbf{W}^{(2)} = [e^{2\pi i \frac{k-1}{N}}]_{k=1}^N$, i.e. a segunda coluna da matriz $\mathbf{W}$. Como $\mathbf{W}^*\mathbf{W} = \mathbf{I}$, temos $\mathcal{F}\mathbf{v} = \mathbf{W}^*\mathbf{W}^{(2)} = N\mathbf{I}^{(2)} = (0, N, 0, \dots, 0)$.

2. c)_[2.5] Sejam $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$.

$$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \int_{-2m\pi}^{2m\pi} 1 dx = 4m\pi, \langle \phi_0, \phi_1 \rangle = \int_{-2m\pi}^{2m\pi} x dx = 0, \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_{-2m\pi}^{2m\pi} x^2 dx = 2\frac{(2m\pi)^3}{3}, \text{ e}$$

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_{-2m\pi}^{2m\pi} \alpha + \beta \sin(x) dx = 4\alpha m\pi + 0, \langle f, \phi_1 \rangle = \int_{-2m\pi}^{2m\pi} \alpha x + \beta x \sin(x) dx = \beta \int_{-2m\pi}^{2m\pi} x \sin(x) dx = \beta [-x \cos(x)]_{-2m\pi}^{2m\pi} + \beta \int_{-2m\pi}^{2m\pi} \cos(x) dx = -4\beta m\pi + 0. \text{ Obtemos } a = \alpha \text{ e } b = \frac{3}{2} \frac{(-4\beta m\pi)}{(2m\pi)^3} = \frac{-3\beta}{(2m\pi)^2}.$$

Logo $g_m(x) = \alpha - \frac{3\beta}{(2m\pi)^2} x \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \alpha$.

Para qualquer m , $\|f - \alpha\|_\infty = \max_{x \in [-2m\pi, 2m\pi]} |\beta \sin(x)| = |\beta|$. Como $F = \langle \{1, x\} \rangle = \mathcal{P}_1$ (verifica cond. de Haar), $\dim(\mathcal{P}_1) = 2$, e com $t_0 = -\frac{3\pi}{2}, t_1 = -\frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2}$ (pertencem a $[-2m\pi, 2m\pi]$), obtemos $f(t_k) - \alpha = \beta \sin(t_k) = (-1)^k |\beta| = (-1)^k \|f - \alpha\|_\infty$. Por aplicação directa do T. Chebyshev, $g_m = \alpha$ é a melhor aproximação *minimax*.

3. a)_[2.0] Temos $u(t+h) = u(t) + u'(t)h + \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u'''(\xi)$. Como $u'' = \alpha u' \cos(\alpha u) = \alpha \sin(\alpha u) \cos(\alpha u) = \frac{\alpha}{2} \sin(2\alpha u)$, obtemos $\begin{cases} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} = u'(t) + \frac{h}{2}u''(t) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi) = \sin(\alpha u(t)) + \frac{\alpha h}{4} \sin(2\alpha u(t)) + \frac{h^3}{6}u'''(\xi) \\ h\phi_h(t, u(t)) = h \sin(\alpha u(t)) + \frac{\alpha h^2}{4} \sin(2\alpha u(t)) \end{cases}$

de $\partial_u \phi_h(t, u) = \alpha \cos(u) + \frac{\alpha^2 h}{2} \cos(2\alpha u)$ limitada, ϕ_h é Lipschitziana em u . Assim $\varepsilon_h(t) = \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \phi_h(t, u(t)) = \frac{h^2}{6}u'''(\xi) = \frac{h^2}{6}\alpha^2 \sin(\alpha \xi) \cos(2\alpha u(\xi))$. Portanto $\varepsilon_h(t) = O(h^2)$ (método de ordem 2) e obtemos $|\varepsilon_h(t)| \leq \frac{\alpha^2}{6}h^2$.

3. b)_[1.0] O método implícito apresentado é a Regra dos Trapézios que tem ordem 2 (inicializado por um método de ordem 2), logo o par predictor-corrector tem também ordem 2. A função iteradora é $g(x) = u_n + \frac{h}{2}(\sin(\alpha x) + \sin(\alpha u_n))$ e temos $g'(x) = \frac{\alpha h}{2} \cos(\alpha x)$, garantido-se a contractividade se $|\frac{\alpha h}{2}| < 1$.

4.a)_[1.0] $I(1) = (b-a)^2, I(x) = I(y) = (b-a)\frac{b^2-a^2}{2} = (b-a)^2\frac{b+a}{2}, Q(1) = \omega, Q(x) = \omega c_1, Q(y) = \omega c_2$. Logo, igualando, $\omega = (b-a)^2, c_1 = c_2 = \frac{b+a}{2}$. Portanto $Q = (b-a)^2 \delta_{(\frac{b+a}{2}, \frac{b+a}{2})}$.

4.b)_[1.5] Temos $g(a) = a, g(b) = b$ e fazendo $x = g(y)$, obtemos $\int_a^b g^{-1}(x) dx = \int_a^b y g'(y) dy = [y g(y)]_a^b - \int_a^b g(y) dy = b^2 - a^2 - \int_a^b g(y) dy$.

Pela R. Simpson existe $\xi \in [a, b] : \int_a^b g(y) dy = \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)) - (\frac{b-a}{2})^5 \frac{g^{(4)}(\xi)}{90}$. Agora, basta notar que $\frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)) = (b-a)(\frac{a+b}{6} + \frac{2}{3}g(\frac{a+b}{2}))$ e colocar $b-a$ em evidência.