

# Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e LERCI - 2º Semestre 2003/2004

## Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

e a sucessão numérica  $\{x_m\}$  definida por  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$

- Mostre que esta sucessão tem limite  $z \in [0, 1]$ , independente de  $x_0 \in [0, 1]$ .
  - Partindo de  $x_0 = 0$ , calcule  $x_5$  e determine um majorante de  $|z - x_5|$ .
2. Considere a iteração do ponto fixo

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

com função iteradora  $g(x) = 1 + \arctan(x)$ .

- Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função  $g$ .
  - Aproxime o ponto fixo de  $g$  com erro inferior a  $10^{-6}$ . Qual a ordem de convergência da iteração?
3. Calcule um valor aproximado de  $\sqrt{10}$  usando o seguinte método numérico

$$x_{m+1} = \frac{30x_m + x_m^3}{10 + 3x_m^2}.$$

Mostre que a ordem de convergência deste método é 3.

4. Pretende-se determinar uma raiz da equação  $x = \phi(x)$  pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a  $0.5 \times 10^{-4}$ . Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad \qquad \qquad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que  $|\phi'(x)| \leq 0.4$ , determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

5. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{1}$$

que tem apenas três raízes reais:  $z_1 < z_2 < z_3$ , tal que  $z_1 \in [-1, 0]$ ,  $z_2 \in [0, 1]$  e  $z_3 \in [4, 5]$ .

- (a) Para aproximar as raízes positivas da equação (1), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$$

- i. Mostre que  $z_2$  e  $z_3$  são pontos fixos de  $g$ .
  - ii. Mostre que o método iterativo associado a  $g$  converge para  $z_2$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [0, 1]$ .
- (b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz  $z_3 \in [4, 5]$ .
- (c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado converja para a raiz negativa da equação.