Método de Newton para Sistemas Não-Lineares

Um sistema de n-equações não-lineares a n-incógnitas tem a forma:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}$$

onde $f_i : \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R}, i = 1, 2, \ldots, n$. Definindo $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]^T$ e $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ \ldots \ f_n]^T$, podemos escrever o sistema na forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{onde} \quad \left\{ \begin{array}{rl} \mathbf{F} : \mathbf{R^n} & \longrightarrow \mathbf{R^n} \\ \mathbf{x} & \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Exemplo: O sistema não-linear

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -6 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{tem como solução} \\ \mathbf{x} = [-1 \ \ 2 \ \ 3]^T \end{array} \right.$$

pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{onde } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1 \\ x_1x_2x_3 + 6 \end{bmatrix}$$

Para funções $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, o método de Newton é dado por:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \left(f'(x_n)\right)^{-1} f(x_n)$$

No caso de funções vectoriais, $\mathbf{F} : \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$, a generalização do método de Newton é dada por:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(n)})$$
$$\text{onde } \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [J(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

e

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

é a matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$, isto é, $J(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, n.$

Logo, dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, as iteradas $\mathbf{x}^{(n+1)}$ são calculadas por:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \left[J(\mathbf{x}^{(n)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \qquad (1)$$

Equação (1) é conhecida como "Método de Newton" para sistemas não-lineares.

Cálculo de $\mathbf{x}^{(n+1)}$

De (1) temos:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)} = -\left[J(\mathbf{x}^{(n)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

Fazendo $\mathbf{d} = \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}$, vem:

$$\mathbf{d} = -\left[J(\mathbf{x}^{(n)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

e multiplicando ambos os lador por $J(\mathbf{x}^{(n)})$ obtemos:

$$J(\mathbf{x}^{(n)})\mathbf{d} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \qquad (2)$$

A equação (2) é um sistema linear que pode ser resolvido para obter o vector $\mathbf{d}$ pelas técnicas usuais: Método Eliminação de Gauss, LU, Jacobi, Gauss-Seidel, etc.

Uma vez obtido $\mathbf{d}$, $\mathbf{x}^{(n+1)}$ é obtido por:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d} \qquad (3)$$

Observação: *Se $J(\mathbf{x}^{(n)})$ for não- singular $\forall n$ e se $\mathbf{x}^{(0)}$ estiver suficientemente perto de $\mathbf{x}$, pode-se provar que $\mathbf{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{x}$ e a convergência é quadrática.*

Exemplo: Calculemos 2 iteradas do método de Newton para o sistema não-linear abaixo.

$$\left.\begin{array}{lcl} x_2 - x_1^2 + 2x_1 & = & 0.5 \\ x_1^2 + 4x_2^2 & = & 4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcccc} f_1(\mathbf{x}) & = & x_2 - x_1^2 + 2x_1 - 0.5 & = & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & = & x_1^2 + 4x_2^2 - 4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solução

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 + 2x_1 - 0.5 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Pelo método de Newton temos:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \left[J(\mathbf{x}^{(n)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}^{(n)})\mathbf{d} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \\ \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d} \end{cases}$$

Cálculo de $J(\mathbf{x}^{(n)})$

$$J(\mathbf{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1^n + 2 & 1 \\ 2x_1^n & 8x_2^n \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{x}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} -2x_1^0 + 2 & 1 \\ 2x_1^0 & 8x_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 1.0)^T$. Então,

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= x_2^{(0)} - \left(x_1^{(0)}\right)^2 + 2x_1^{(0)} - 0.5 = 1 - 0.5 = 0.5 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= \left(x_1^{(0)}\right)^2 + 4\left(x_2^{(0)}\right)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear para o cálculo de $\mathbf{d}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \text{que tem como solução:} \\ d_2 = 0 \text{ e } d_1 = -0.25 \end{cases}.$$

Portanto,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} + d_1 = 0.0 - 0.25 = -0.25 \\ x_2^{(0)} + d_2 = 1.0 + 0.0 = 1.0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{x}^{(2)}$:

$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}$

onde $\mathbf{d}$ é solução do sistema linear

$$J(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -2x_1^1 + 2 & 1 \\ 2x_1^1 & 8x_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^{(1)} - \left(x_1^{(1)}\right)^2 + 2x_1^{(1)} - 0.5 \\ \left(x_1^{(1)}\right)^2 + 4\left(x_2^{(1)}\right)^2 - 4 \end{bmatrix}$$

donde obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ -0.5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06255 \\ -0.0625 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método eliminação Gauss a este sistema vem:

$$\left\{\begin{array}{l} m_{21}=\dfrac{a_{21}}{a_{11}}=\dfrac{-0.5}{2.5}=0.2 \\ E_2-m_{21}E_1 \longrightarrow E_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2.5d_1+d_2 & =0.0625 \\ 8.2d_2 & =-0.050 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} d_2=-0.0061 \\ d_1=0.02744 \end{array}\right.$$

Portanto,

$$\begin{array}{l} x_1^{(2)}=-0.25+0.02744=-0.22256 \\ x_2^{(2)}=1.0-0.00610=0.99390 \end{array}$$