Exercícios de Análise Matemática II: a Catenária

1. a) Primitivar a função
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   b) Seja f uma função continuamente diferenciável num intervalo I. Dar uma expressão para as primitivas de
$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$$
   em I usando $f(x)$.

2. Seja $I = [a,b]$ um intervalo limitado fechado. O gráfico duma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dito *rectificável* se o conjunto
$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$$
é limitado e nesse caso define-se o *comprimento* do gráfico de f como sendo o supremo deste conjunto. Este conjunto é formado pelos comprimentos das linhas poligonais inscritas no gráfico da função, como a que se mostra na Figura 1.

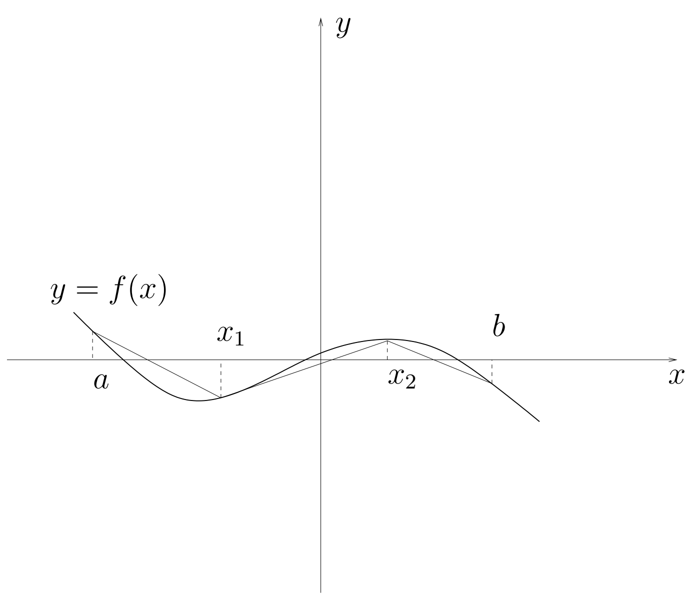

Figura 1: linha poligonal inscrita no gráfico de uma função

a) Mostrar que $f(x) = x$ tem gráfico rectificável em cada intervalo limitado fechado $[a, b]$ e calcule o comprimento desse gráfico em função do intervalo.

b) Mostrar que o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) \text{ c.c.} \end{cases}$$

em $[0, 1]$ não é rectificável.

3. a) Mostrar que se f é uma função diferenciável num intervalo limitado fechado $[a, b]$ e se a função $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é Riemann integrável, então o gráfico de f nesse intervalo é rectificável e o seu comprimento é

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

b) Explicar porque é que o exemplo em 2. b) não contradiz o enunciado da alínea anterior.

c) Mostar que se f é continuamente diferenciável em $[a, b]$ também o é a função

$$l(x) = \text{ comprimento do gráfico de } f \text{ no intervalo } [a, x]$$

e a sua derivada é $\sqrt{1 + f'(x)^2}$.

4. Exercícios recomendados: calcular os comprimentos dos gráficos das seguintes expressões num intervalo $[a, b]$ contido no seu domínio:

a) $y = x^2 + 4x - 6$ (ou, em geral, qualquer polinómio de grau dois)

b) $y = x^2$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \mathrm{e}^x$

e) $y = \ln(x)$

f) Arco de catenária:

$$y = \frac{\cosh(kx)}{k}$$

onde $k > 0$ é um parâmetro positivo.

g) $y = \sqrt{1 - x^2}$

h) Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gráfico rectificável em intervalos limitados, relacionar o comprimento do seu gráfico num intervalo $[a, b]$ com o comprimento do gráfico da função

$$f_k(x) = \frac{1}{k} f(kx)$$

no intervalo $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ para cada $k > 0$. Interpretar geometricamente o resultado.

5. Exercícios não recomendados: calcular os comprimentos dos gráficos das seguintes expressões num intervalo $[a, b]$ contido no seu domínio:

   a) $y = 1/x$

   b) $y = \cosh(2x)$, ou, em geral,

   $$y = \frac{\cosh(k_1 x)}{k_2}$$

   com $k_1 \neq k_2$.

   c) Arco de elipse:

   $$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

   ou, em geral, qualquer arco de elipse que não seja uma circunferência.

   d) Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gráfico rectificável em intervalos limitados, relacionar o comprimento do seu gráfico num intervalo $[a, b]$ com o comprimento do gráfico da função

   $$f_{k_1,k_2}(x) = \frac{1}{k_1} f(k_2 x)$$

   no intervalo $[\frac{a}{k_2}, \frac{b}{k_2}]$ para um par de valores positivos $k_1, k_2 > 0$ com $k_1 \neq k_2$. Interpretar geometricamente a dificuldade.

6. Seja f uma função cujo gráfico descreve a configuração de um fio mole de densidade linear uniforme ρ (ou uma corrente de anéis muito pequenos relativamente ao seu comprimento) suspenso pelas extremidades a uma altura suficiente para que o fio não toque no solo. Supor que f é uma função C^2.

   a) Considerar que a tensão em cada ponto do fio é tangencial (o fio é mole). Através do equilíbrio de forças sobre uma pequena porção do fio (Figura 2.) mostrar que a componente horizontal da tensão tem intensidade constante τ_h ao longo do fio.

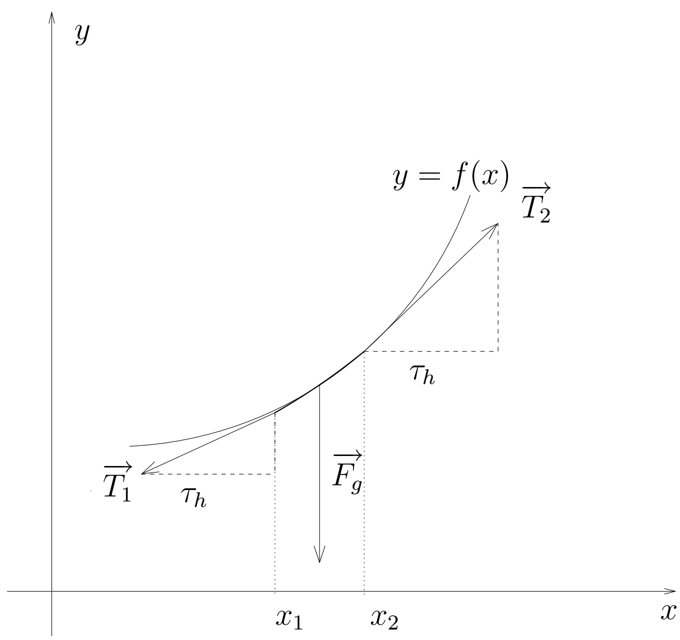

Figura 2: forças actuantes sobre uma porção de fio em suspensão

b) Mostrar que a componente vertical da tensão num ponto $(x, f(x))$ tem intensidade $|\tau_h f'(x)|$.

c) Mostrar que na Figura 2. o peso $\|\overrightarrow{F_g}\|$ é

$$g\rho \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

d) Usando a Figura 2. e fazendo $x = x_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$, escrever a condição de equilíbrio para as componentes verticais das forças e mostrar que tomando o limite quando $\Delta x \to 0$ se obtém

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = \frac{g\rho}{\tau_h}.$$

e) Obter para f a expressão da catenária dada em 4f) com

$$k = \frac{g\rho}{\tau_h}.$$

Interpretar fisicamente as duas constantes de primitivação que surgem. (**Sugestão**: recordar o exercício 1.)

f) Mostrar que a configuração do fio depende apenas do seu comprimento e da posição relativa dos pontos de suspensão.

7. Um fio suspenso pelas extremidades à altura de 10 metros com 4 metros de distância entre os pontos de suspensão faz junto a esses pontos um ângulo de $45°$ com a vertical. Calcular o seu comprimento e a altura do ponto mais baixo do fio.

8. Um fio de 5 metros vai ser suspenso pelas extremidades em dois pontos à mesma altura e a uma distância horizontal de 2 metros. Determinar a altura mínima a que devem estar os pontos de suspensão para que o fio não toque no chão. ($\operatorname{senh}(2.55)/2.55 \approx 2.50$)

9. Um fio suspenso pelas extremidades à altura de 10 metros com 4 metros entre os pontos de suspensão desce no ponto médio até à altura de 8 metros. Calcular o comprimento do fio. ($(\cosh(1.62) - 1)/1.62 \approx 1.00$)

10. Dado um fio em suspensão, mostrar que a intensidade da tensão nos seus pontos é uma função crescente da altura.

11. Pretende-se suspender um fio em dois pontos à mesma altura separados por uma dada distância a. Determinar o comprimento que o fio deve ter para minimizar a tensão junto aos pontos de suspensão e a altura mínima a que um fio com esse comprimento deve ser suspenso para não tocar no chão. (A solução positiva da equação $\coth x = x$ é aproximadamente 1.20)

Nota: o leitor deve sentir-se encorajado a produzir tabelas de $\operatorname{senh}(x)/x$ e de $(\cosh(x)-1)/x$ (usando por exemplo o software habitualmente disponível) e a criar e estudar problemas análogos aos sugeridos acima.