



- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- **Justifique** convenientemente todas **as respostas**.

Grupo I

5.5 valores

Uma empresa pretende contratar um empregado para um determinado posto operacional. Suponha que cada candidato é qualificado para o posto com probabilidade $q = 0.3$ (e não o é com probabilidade $1 - q$). Todos os candidatos são submetidos a um teste com 20 perguntas de resposta verdadeiro/falso. Sabe-se que um candidato qualificado tem uma probabilidade de 0.9 de responder correctamente a cada questão, enquanto um candidato não qualificado responde ao acaso. Todo o candidato que responder correctamente a pelo menos 16 questões é classificado pela empresa como qualificado (admita que os acontecimentos relativos a questões distintas podem ser considerados independentes).

- (a) Calcule a probabilidade de: (2.5)
- um candidato qualificado ser classificado pela empresa como qualificado (i.e um candidato qualificado responder correctamente a pelo menos 16 questões do teste);
 - um candidato não qualificado ser classificado pela empresa como qualificado;
 - um candidato escolhido ao acaso ser classificado pela empresa como qualificado.

Nota: se não respondeu à alínea anterior admita (nas duas alíneas a seguir) que a probabilidade de um candidato escolhido ao acaso ser classificado pela empresa como qualificado é 0.43.

- (b) Calcule a probabilidade de: (1.5)
- um candidato classificado pela empresa como qualificado o ser efectivamente;
 - um candidato escolhido ao acaso ser correctamente classificado pela empresa.

Em face dos resultados obtidos (nesta alínea) acha que o teste é adequado? Justifique.

- (c) Se a empresa fizer os testes sequencialmente, quantos testes é esperado realizar até encontrar um candidato classificado como qualificado? E qual a probabilidade de ter de realizar pelo menos 10 testes até encontrar um candidato classificado como qualificado? (1.5)

Grupo II

4.5 valores

1. Um corredor de 100 metros estabeleceu que deveria fazer exactamente 100 passos por corrida. Considerando que o comprimento de cada passo é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo 0.9 m a 1.1 m, determine, assumindo que os diferentes passos são independentes:

- (a) O valor esperado e a variância da distância total percorrida nos 100 passos. (0.5)
- (b) Um valor aproximado da probabilidade da distância total percorrida nos 100 passos diferir menos de 1 m dos 100 metros desejados. (1.5)

2. O número de motores expedidos diariamente por um armazém (X) possui distribuição uniforme discreta em $\{1, 2\}$. O serviço de apoio ao cliente concluiu recentemente que a probabilidade de um motor ser recebido, por qualquer cliente que o adquiriu, dentro do prazo acordado é igual a 90%. Seja Y a v.a. que indica, relativamente a cada expedição diária, o número de motores recebidos pelo(s) cliente(s) dentro do prazo acordado.

(a) Identifique a distribuição de Y sabendo que foram expedidos 2 motores. (0.5)

(b) Prove que as constantes a , b e c , que constam da tabela com a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) , são iguais a $1/200$, $18/200$ e $81/200$, respectivamente. (1.0)

X	Y		
	0	1	2
1	$1/20$	$9/20$	0
2	a	b	c

(c) Compare os valores esperados de Y e $Y|X = 2$. Que conclusão pode tirar destes resultados? (1.0)

Grupo III

5.0 valores

1. Para estudar o tempo de entrega de um serviço de entregas rápidas, uma empresa decidiu enviar um brinde a 10 dos seus melhores clientes (localizados à mesma distância) e registar o tempo em horas decorrido até à sua entrega. Os resultados foram:

$$(7, 12, 9, 11, 10, 14, 6, 13, 8, 10).$$

Com base nesta amostra e admitindo que os tempos têm distribuição exponencial, deduza e calcule as estimativas de máxima verosimilhança para a variância do tempo de entrega e para a probabilidade desse tempo exceder 8 horas. (2.0)

2. Admita que pode escolher entre dois servidores de e-mail (A e B) e pretende eleger o mais veloz. Para isso, decide enviar 30 e-mails para si próprio (com o mesmo número de bytes e em instantes de tempo seleccionados ao acaso) e registar o tempo (em segundos) entre o envio e a recepção. Desses 30 e-mails, 15 foram enviados usando o servidor A, sendo os tempos entre envio e recepção registados como $(x_1, x_2, \dots, x_{15})$. Os restantes 15 foram enviados através do servidor B e os tempos registados como $(y_1, y_2, \dots, y_{15})$. Sabendo que:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 82.5, \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 630, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 694,$$

e assumindo que, para ambos os servidores, os tempos decorridos entre o envio e a recepção têm distribuições normais independentes e com a mesma variância:

(a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença entre os valores esperados de X e Y . (1.5)

(b) Teste a hipótese de que o servidor A é, em termos de tempo médio decorrido entre o envio e a recepção, pelo menos tão veloz como o servidor B. Tome a decisão com base no valor-p. (1.5)

Grupo IV

5.0 valores

1. Analisando o salário líquido mensal de 100 jovens engenheiros empregados em empresas de um certo sector, verificou-se que 30 recebiam até 2000 euros, 40 entre 2000 e 3000 euros, 20 entre 3000 e 4000 euros e os restantes 10 entre 4000 e 5000 euros. Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese desse salário ter distribuição normal com valor esperado 3000 euros e desvio padrão igual a 800 euros. (2.0)

2. Procedeu-se ainda ao estudo da relação entre o rendimento mensal (X) e o IRS pago (Y) por esses engenheiros, em milhares de euros, usando um modelo de regressão linear simples ($Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, com as suposições usuais). Um resumo dos dados observados é apresentado em seguida:

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 250, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 800, \quad \sum_{i=1}^{100} y_i = 70, \quad \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 100.$$

(a) Sabendo que $\hat{\beta}_0 = 0.5$, determine a estimativa de β_1 e teste a significância da regressão a um nível de significância de 10%. (2.0)

(b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior e o valor do coeficiente de determinação, considera que o modelo de regressão linear adoptado se ajusta bem aos dados? (1.0)