Departamento de Matemática - Secção de Estatística e Aplicações

Probabilidades e Estatística

MEEC

2º semestre – 2008/09 | 2º Exame/2º Teste
11/07/2009 – 9 horas | Duração: 3 horas/1 hora e 30 minutos

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- **Justifique** convenientemente todas **as respostas**.

Grupo I *4.5 valores*

1. Um jovem pretende ir a pé para um certo destino. Começa por tomar um de 4 caminhos possíveis de chegar ao destino, 1, 2, 3, 4. Ao fim de alguns quilómetros o caminho i divide-se em $1+i$ caminhos, apenas um dos quais conduz ao destino pretendido. O jovem não tem mapa e em cada encruzilhada escolhe aleatoriamente o caminho. Qual é a probabilidade de atingir o seu destino sem ter de voltar para trás? (1.0)

2. Um fabricante de computadores importa placas gráficas (a um único produtor) que vêm embaladas em lotes de 1000 unidades. Na recepção é efectuado um controlo de qualidade que consiste na inspecção, ao acaso e com reposição, de n placas de cada lote. Se alguma das placas inspeccionadas for defeituosa, o lote é rejeitado e devolvido sem qualquer pagamento. Seja p a proporção de placas defeituosas por lote.

   (a) Se $n = 10$ qual é a probabilidade de rejeição de um lote para o qual $p = 0.05$? (1.5)
   Acha que o resultado seria muito diferente se a inspecção fosse realizada sem reposição? Justifique.

   (b) Suponha que cada lote custa, ao produtor das placas, 1000 euros e é vendido ao fabricante de computadores por 3000 euros, caso este não o rejeite; se for rejeitado, o produtor das placas vende o lote a uma fábrica de reciclagem por metade do preço de produção. Para $n = 10$ e $p = 0.05$, calcule: (2.0)

   i. o valor esperado e a variância do lucro que o produtor das placas obtém com cada lote;
   ii. a probabilidade de o lucro total associado à venda de 100 lotes ser positivo.

   Nota: se não respondeu à alínea (a) admita que a probabilidade aí pedida é 0.43.

Grupo II *5.5 valores*

1. Um armazém recebe motores de três fábricas distintas (A, B e C) responsáveis por 20%, 30% e 50% dos motores em *stock*, respectivamente. Admita que os tempos até falha (X, em milhares de horas) dos motores provenientes das fábricas A, B e C são variáveis aleatórias independentes com funções de densidade de probabilidade $f_A(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x/4}$, $f_B(x) = \frac{1}{3}\,e^{-x/3}$ e $f_C(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x/2}$, para $x > 0$. Foi seleccionado ao acaso um motor do *stock* do armazém:

   (a) Calcule a probabilidade desse motor vir a falhar após mais de 1000h de operação. (1.5)

   (b) Ensaiou-se a duração desse motor e verificou-se que foi inferior a 1000h. Qual a probabilidade desse motor ser proveniente da fábrica C? (1.0)

2. Considere o par aleatório contínuo, (X, Y), que representa o ponto de impacto de um projéctil, e que se admite por simplicidade ter distribuição uniforme no círculo de raio unitário, isto é:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de k e as funções de densidade de probabilidade marginais de X e Y. (1.0)

   (b) Sem efectuar cálculos, mas explicando cuidadosamente o seu raciocínio, indique o valor de $\rho_{X,Y}$. (1.0)

   (c) Diga, justificando, se X e Y são independentes. (1.0)

Grupo III *5.0 valores*

1. Diversos estudos têm sugerido que, em determinados locais e sob certas condições climatéricas, a altura das ondas do mar (X, em metros) é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \frac{x}{\delta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\,\delta^2}\right),\ x > 0\ (\delta > 0).$$

A amostra mais recente de X possui dimensão $n = 100$ e é tal que $\sum_{i=1}^{100} x_i = 125.442$ e $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 200.763034$.

(a) Determine o estimador de máxima verosimilhança de δ e calcule a respectiva estimativa. (1.5)

(b) Sabendo que $E(X) = \delta\sqrt{\pi/2}$ e $V(X) = \delta^2(2 - \pi/2)$, mostre que, dada uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$ da população X, a variável aleatória (1.0)

$$\sqrt{\frac{n}{2-\pi/2}}\left(\frac{\bar{X}}{\delta} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

segue aproximadamente uma distribuição $N(0,1)$. Justifique ainda que essa variável pode ser usada como variável aleatória fulcral para δ.

(c) Obtenha um intervalo de confiança aproximado a 95% para δ. (1.0)

2. Uma experiência consiste em medir a intensidade de corrente (X, em μA) necessária para que um tubo de raios catódicos atinja um certo nível de brilho. Medições efectuadas em 30 tubos seleccionados ao acaso conduziram a $\bar{x} = 317.2\mu A$ e $s = 15.7\mu A$. Será possível concluir, a partir destes resultados e admitindo que as intensidades de corrente têm distribuição normal, que o valor esperado de X é 320 μA? Tome a decisão com base no valor-p. (1.5)

Grupo IV *5.0 valores*

1. Num estudo sobre a distribuição da população de uma espécie de aves em perigo de extinção, um zoólogo coloca a hipótese de que o tamanho de cada colónia dessas aves (X, em dezenas de unidades) possa ser modelada pela seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1 - \frac{2}{x}, & x \geq 2. \end{cases}$$

A inspecção de diversas colónias seleccionadas aleatoriamente permitiu obter a seguinte tabela de frequências:

Classe	$[2, 5/2]$	$]5/2, 10/3]$	$]10/3, 5]$	$]5, 10]$	$]10, +\infty[$
Frequência observada	22	20	24	22	18

O que pode o zoólogo concluir sobre o ajustamento de tal função de distribuição, ao nível de significância de 10%? (1.5)

2. A massa muscular de um adulto decresce, em geral, com a idade. Com o objectivo de averiguar tal relação em mulheres, uma nutricionista de renome seleccionou aleatoriamente 10 mulheres com idades entre os 40 e 79 anos, tendo obtido os seguintes resultados:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Idade (x_i)	71	64	43	67	56	73	68	56	76	65
Medida massa muscular (y_i)	82	91	100	68	87	73	78	80	65	84

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 639 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 41701 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 808 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 66292 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 50887.$$

Assuma que o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, com as suposições habituais, é adequado e responda às questões seguintes:

(a) Estime a recta de regressão e teste a significância da regressão ao nível de significância de 5%. (2.0)

(b) Obtenha um intervalo de confiança de 95% para o valor esperado da medida da massa muscular de uma mulher com 50 anos. (1.5)